ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 25, n. 1, 2017

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2017

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 25, n. 1, 2017

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2017

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: prof.ssa Silvia Sbaragli (silvia.sbaragli@supsi.ch)
Ricezione articoli: prof.ssa Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Indice

Due riflessioni sull'attività in matematica

Gérard Vergnaud
Direttore di Ricerca emerito al CNRS

Abstract. *This short paper presents some considerations on the terms "situations" and "conceptual fields"; "diagram", "algorithm" and "instinct".*

Keywords: situation, conceptual field, diagram, algorithm, instinct

Sunto. *In questo breve testo si compiono considerazioni relative ai termini "situazioni" e "campi concettuali"; "schema", "algoritmo" e "istinto".*

Parole chiave: situazione, campo concettuale, schema, algoritmo, istinto

Resumen. *En este breve texto se proponen consideraciones relativas a los términos "situaciones" y "campos conceptuales"; "esquema", "algoritmo" e "instinto".*

Palabras clave: situación, campos conceptuales, esquema, algoritmo, instinto

1. Premessa

Un primo punto di riflessione è che, se la conoscenza matematica si esprime classicamente attraverso concetti e teoremi, l'attività matematica in situazione non può però essere descritta totalmente e direttamente in questo modo: come ogni attività, e in particolare come il gesto, l'attività matematica ha un decorso temporale; in un certo senso, il trattamento di una situazione e il ragionamento sono dei gesti. Più in generale, il pensiero stesso è un gesto. Ma, siccome occorre che le conoscenze siano contenute nell'organizzazione dell'attività per ciò che in essa c'è di operatorio, occorre considerare con serietà il ruolo della concettualizzazione: è questo che mi ha spinto a introdurre in passato le due idee di "concetto-in-atto" e di "teorema-in-atto", che richiamerò tra breve con degli esempi. La matematica è dunque allo stesso tempo conoscenza e attività.

Un secondo punto di riflessione è che questa attività non può essere indipendente dalle altre attività che si riscontrano nel corso della vita ordinaria, della vita scolare e professionale, dato che è proprio nel corso di queste attività che interviene l'attività matematica stessa. Si è allora condotti ad avvicinare l'uno all'altro i concetti che designano delle forme di organizzazione dell'attività, e quasi a unificare il concetto di algoritmo a quelli di schema e di istinto. Schema e istinto si rivolgono assai spesso a delle situazioni per le quali non esiste alcun algoritmo; i gesti degli sportivi e dei ballerini, l'orientamento e il movimento nello spazio, il rapporto con gli altri e la conversazione sono esempi significativi. Come l'algoritmo, essi sono organizzati attraverso certe regole e questo giustifica il fatto che si tenti l'avvicinamento, l'analogia. Una ragione ulteriore è che, nelle stesse situazioni matematiche, l'attività spesso non è altro che algoritmica.

L'adattamento a delle situazioni nuove e la variabilità dell'attività nel corso dello sviluppo sono particolarmente importanti per la ricerca in didattica, tant'è vero che lo sviluppo dipende da questo adattamento, sia che si produca con l'aiuto o senza l'aiuto di altri. Questo adattamento avviene solo raramente attraverso la scoperta e l'uso di algoritmi, ma piuttosto grazie al ricorso a degli schemi personali, e anche grazie all'affinamento di certi istinti, come nel caso della modificazione del camminare per l'apprendimento del ballo.

L'insegnamento è in certo senso una provocazione, nel senso che richiede, fra altre cose, che il maestro o il formatore proponga agli allievi o agli apprendisti delle situazioni che sono al margine del loro repertorio, proprio allo scopo di provocare e favorire il loro adattamento a tali nuove situazioni. Ciò presuppone, nel ricercatore e nell'insegnante, una certa visione epistemologica delle situazioni e una certa rappresentazione del repertorio degli allievi, variabile secondo gli individui e secondo le culture.

Queste considerazioni non sono indipendenti le une dalle altre; ma, per semplicità estrema, le tratteremo in due sezioni distinte nel seguito del presente articolo: Situazioni e campi concettuali (§ 2); Istinto, schema e algoritmo (§ 3).

2. Situazioni e campi concettuali

Esiste per uno stesso concetto una certa varietà di situazioni, per analizzare le quali si può ricorrere a dei concetti diversi e a proprietà diverse di tali concetti. Per esempio, per la ricerca del quarto proporzionale, nel caso in cui non si hanno che due variabili proporzionali l'una all'altra, le risorse usate dagli allievi sono di una certa varietà. Prendiamo un esempio.

Due bambini hanno appena ricevuto un bellissimo cronometro come regalo dalla loro nonna. Sono in treno e notano che questo impiega 16 minuti fra due cittadine A e B la cui distanza è a loro nota: 40 km. Un po' più tardi, verificano una durata di 36 minuti fra due altre cittadine X e Y; essi allora si chiedono quale sia la distanza fra X e Y. Entrambi convengono che la velocità del treno sia costante.

A. Una prima idea consiste nel dividere 40 per 16 e applicare questo coefficiente di proporzionalità a 36. La proprietà implicitamente utilizzata è il calcolo della velocità (qui rappresentata dal coefficiente di proporzionalità). L'applicazione di questo coefficiente a 36 permette di trovare la distanza fra X e Y.

B. Una seconda idea consiste nel dividere 36 per 16 e nell'applicare questo rapporto fra le due durate alla distanza di 40 km.

C. Una terza possibilità consiste nel moltiplicare 16 minuti per 2 per avvicinarsi a 36 minuti, rilevare la differenza fra 32 e 36, cioè 4 minuti, che è un quarto di 16. Per isomorfismo, i bambini possono applicare successivamente a 40 km il rapporto ×2 e il rapporto /4 (dividere per 4) e aggiungere le due distanze: 80 km (40 moltiplicato per 2) e 10 km (40 diviso per 4).

D. Una quarta possibilità, spesso osservata, consiste nel cercare la differenza fra le due durate osservate, 36 e 16, e nel decidere come usare questo risultato: forse aggiungerlo a 40, per esempio. Si tratta evidentemente di un errore, ma è indicatore di una preoccupazione nel voler comparare tra loro grandezze di una stessa natura, suscettibili di essere poi usate nel calcolo delle distanze.

Si possono osservare almeno una dozzina di altri possibili comportamenti, spesso ancora più sorprendenti del caso **D**. Non è affatto difficile identificare le proprietà della funzione lineare usate nei quattro casi.

A consiste nel cercare il coefficiente di proporzionalità fra distanza e durata e a applicarlo alla nuova durata, 36 minuti.

$F(x) = ax$ cercare e calcolare a.

L'inconveniente di questo ragionamento, per qualche allievo, è che si dividono l'una per l'altra due grandezze di natura diversa, una distanza per una durata. Si tratta dunque di un quoziente dimensionale. Questo ragionamento non è evidente, come mostrano le esitazioni degli allievi a farvi ricorso e i mezzi osservati nel corso della storia per aggirarlo: si accetta di dividere una grandezza sia per un'altra della stessa natura, sia per un numero senza dimensione, ma si accetta con più difficoltà di dividere una grandezza per un'altra di natura diversa.

La scelta della seconda idea **B** permette proprio di evitare tale difficoltà, perché in tal caso si calcola il rapporto fra due durate: è un numero senza dimensione. E lo si applica a 40 km.

$F(kx) = kf(x)$ cercare e calcolare k

L'idea **C** permette di evitare la divisione di 36 per 16, per nulla agevole per gli allievi, trasformando 36 in una somma di due grandezze, 32 minuti e 4 minuti. Il teorema che spiega questo ragionamento è una forma lineare che usa allo stesso tempo l'isomorfismo moltiplicativo e l'isomorfismo additivo:

distanza (32+4) = distanza (32) + distanza (4)

distanza (2×16) = 2 (distanza (16)) distanza (16/4) = (distanza (16))/4

La scelta **D**, come accade per altre proposte, testimonia la difficoltà delle strutture moltiplicative, in questo caso del concetto di rapporto al quale è sostituito quello di differenza.

Inoltre, più d'una dozzina di altre "invenzioni" riscontrate nelle attività in aula testimoniano, come nel caso di **D**, che la differenza fra grandezze della stessa natura viene evocata abbastanza naturalmente; il che non capita quasi mai quando si tratta di relazioni fra grandezze di natura diversa. Pertanto, dal punto vista numerico, sarebbe più facile notare che 40 è 2 volte 16 più la metà di 16, mentre 36 è 2 volte 16 più un quarto di 16. Di fatto nessuno studente usa la prima decomposizione (40 è 2 volte 16 più la metà di 16), la quale si scontra in effetti con questo ostacolo: non ha alcun senso addizionare delle durate per ottenere una distanza.

I ragionamenti degli allievi non sono puramente numerici ma riguardano grandezze, non solamente numeri.

Un altro esempio complesso è quello della doppia proporzionalità: una variabile è proporzionale a due altre variabili, tra loro indipendenti. Questa struttura fondamentale, molto importante in fisica, ma che si osserva anche in numerose situazioni di calcolo di costi, dà luogo a una varietà impressionante di situazioni e di ragionamenti. Tali ragionamenti restano per lo più impliciti: il riferimento alla bilinearità non si esprime facilmente nel linguaggio ordinario e, perfino nell'insegnamento secondario, gli allievi lo comprendono con difficoltà. Una difficoltà concettuale nuova si manifesta, quella dell'indipendenza delle co-variazioni. Si possono trovare esempi in due vecchie pubblicazioni (Vergnaud, 1983a, 1983b).

Così, la tesi secondo la quale le strutture moltiplicative formano un campo concettuale sembra incontrovertibile, dato che queste strutture mettono in gioco, oltre alle operazioni di moltiplicazione e divisione, i concetti di rapporto, di funzione lineare, di funzione bilineare e n-lineare, di isomorfismo, di analisi dimensionale e di indipendenza. Questo campo concettuale può essere definito sia come un insieme di situazioni sia come un insieme di concetti. La padronanza di un concetto non si acquisisce in una sola tappa, ma in parecchie, e attraverso l'incontro con situazioni che coinvolgono proprietà diverse dei concetti, la cui padronanza può richiedere parecchi anni, per esempio una dozzina d'anni nel caso che ci interessa qui. Se si guardano i ragionamenti in situazione, alcuni sono precoci (4, 5 o 6 anni per le strutture additive, 8 o 9 per le strutture moltiplicative); altri sono più tardivi (16 o 17 anni, anche per gli allievi migliori); esistono dei ragionamenti che non sono mai scelti dagli allievi, e nemmeno da certi adulti.

Le due idee principali da ricordare sono, in primo luogo, la varietà delle proprietà di un concetto e, in secondo luogo, il ricorso a diversi concetti familiari per analizzare questa varietà. Si aggiunga a ciò il fatto che servono anni di formazione e una varietà di situazioni e di formalismi diversi per permettere agli allievi di padroneggiare questa varietà.

3. Istinto, schema e algoritmo

Un algoritmo è costituito da parecchi elementi che gli forniscono delle proprietà piuttosto caratteristiche:

- uno o più scopi, o ancora l'essere relativo a una classe di problemi;
- delle regole per concatenare le azioni e le informazioni acquisite man mano che l'attività progredisce;

- controlli sull'avanzamento del processo e sulla fondatezza delle operazioni effettuate;
- la soddisfazione di essere arrivati al risultato cercato, se così è, oppure alla conclusione che il problema non ha soluzione. E tutto ciò in un numero finito di passi.

Che il numero di passi debba essere finito è un criterio essenziale, come in un programma informatico: terminare il percorso algoritmico in un numero finito di passi sia per giungere alla risoluzione del problema posto, sia per giungere alla certezza che non c'è alcuna soluzione. È una condizione *sine qua non*; all'inizio della rivoluzione informatica, negli anni '70, certi programmi non terminavano mai e il calcolatore continuava a funzionare senza mai fermarsi. La funzionalità dell'algoritmo non si manifestava che dopo una lunga durata di funzionamento: come decidere allora se l'algoritmo è efficace o no?

Poiché certe proprietà dell'algoritmo spettano anche a forme non algoritmiche dell'attività, a eccezione proprio del numero finito di passi, occorre esaminarle attentamente.

Cominciamo dal concetto di schema; noi lo definiamo in base a quattro componenti:

- uno o più scopi;
- regole di azione, di assunzione di informazione e di controllo;
- invarianti operatori; concetti-in-atto e teoremi-in-atto;
- possibilità d'inferenza.

È essenziale secondo noi non accontentarsi dell'idea di azione, per quanto essa sia importante: l'attività è in effetti piena di assunzioni d'informazione, necessarie sia per determinare le successive azioni sia per controllare la legittimità e il corretto sviluppo delle azioni già effettuate.

Gli invarianti operatori (concetti-in-atto e teoremi-in-atto) caratterizzano il contenuto concettuale delle regole effettivamente seguite e la loro adeguatezza se esse sono pertinenti; se non lo sono, gli invarianti operatori permettono di caratterizzare gli errori commessi in termini concettuali. Senza gli invarianti operatori, non sarebbe possibile comprendere la relazione fra le due componenti della conoscenza: la sua forma operatoria, che permette di agire in situazione, e la sua forma predicativa, che permette di enunciare gli oggetti di pensiero e le loro proprietà.

Le possibilità di inferenza sono a loro volta necessarie per comprendere da una parte le previsioni e attese dell'attività e, dall'altra parte, le ragioni alla base di nuove informazioni, decisioni d'azione, assunzioni di nuove informazioni, nuove azioni. L'attività è anche calcolo.

La somiglianza fra la definizione di schema e quella di algoritmo è evidente. Semplicemente, gli algoritmi sono degli schemi, ma non tutti gli schemi sono degli algoritmi. Si vede la loro complementarità in due casi molto importanti:

- quando un allievo dimentica una parte di un algoritmo, per esempio della divisione, o una parte del ragionamento proporzionale, e la sostituisce con degli schemi personali;
- quando un allievo affronta una situazione nuova per lui e non dispone di un algoritmo che lo possa aiutare; egli fa allora appello a tutte le sue risorse, cioè a quelle dei suoi schemi apparentemente promettenti.

Riguardo al concetto di *istinto*, è più sottile identificare la sua relazione con i concetti di schema e di algoritmo. Si sa bene che gli istinti sono suscettibili di adattarsi alle circostanze e dunque di far posto all'intelligenza, ma è piuttosto nella direzione dell'automatizzazione dello sviluppo dell'attività che bisogna secondo noi cercare la parentela. In effetti il controllo della progressione e dello sviluppo dell'attività, nello schema e nell'algoritmo, richiede una vigilanza quasi permanente. Questa vigilanza deve essere evidenziata. Questa evidenziazione può intervenire quando lo sviluppo dell'attività (azioni, assunzioni dì informazione, controlli) è abbastanza ben dominata affinché siano soppressi certi controlli. Ne consegue una certa automatizzazione che può dare un'illusione all'osservatore: costui può credere di avere a che fare con un vero automatismo, che richiedere esercizi ripetitivi per essere appreso, prima che si possa procedere a degli apprendimenti più intelligenti.

Non si possono confondere istinto, schema e algoritmo, benché a volte si sia tentati di farlo proprio a causa del fatto che i tre concetti designano forme organizzate dell'attività. Ma, allo stesso tempo, non è errato riconoscere la loro analogia. Proprio l'organizzazione delle attività è uno dei criteri interessanti riguardanti la vita; e si possono cercare le forme che questa ha assunto nel corso dell'evoluzione delle specie e della storia.

Riferimenti bibliografici

Vergnaud, G. (1983a). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (Ed.). (1983b). *Didactique et acquisition du concept de volume. Recherches en Didactique des Mathématiques* [Numero speciale], *4*(1), 9–25.

[Traduzione di Bruno D'Amore e Maura Iori]

Finnish elementary teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching

Erkki Pehkonen
University of Helsinki, Finland

Abstract. *According to the curriculum (NBE, 2004), improving pupils' problem solving skills is an important objective. Teachers' role is crucial in carrying out the objectives of the curriculum. Especially their conceptions influence decisions they make when teaching mathematics. The purpose of this paper is to figure out what kind of conceptions elementary teachers have concerning problem solving and its teaching in mathematics. The data was gathered with a questionnaire consisting of open questions during springs 2006 and 2007. All the elementary teachers (grades 1–6) of the city Kerava (N = 103) in the southern Finland was given the questionnaire, but the responding rate was only 41%. According to teachers, problem solving in mathematics means various problems, strategies, mathematics in everyday situations, pupils' own thinking and applying previously learned skills. In the teachers' conceptions of teaching problem solving in mathematics, concrete and practical approaches are emphasized.*

Keywords: elementary teacher, conception, problem solving, mathematics

Sunto. *Secondo il curricolo (NBE, 2004), migliorare le abilità degli studenti nel problem solving è un obiettivo importante. Il ruolo degli insegnanti è fondamentale per realizzare gli obiettivi del curricolo. Soprattutto, le loro concezioni influenzano le decisioni che prendono quando insegnano matematica. Lo scopo di questo lavoro è quello di capire che tipo di concezioni hanno gli insegnanti elementari riguardo al problem solving e al suo insegnamento in matematica. I dati sono stati raccolti con un questionario composto di domande aperte durante le primavere 2006 e il 2007. Tutti gli insegnanti elementari (dalla prima alla sesta) della città di Kerava (in numero di 103) nel sud della Finlandia sono stati sottoposti al test, ma solo il 41% ha dato risposta. Secondo gli insegnanti, il problem solving matematico comporta vari problemi, strategie, matematica delle situazioni quotidiane, pensiero personale degli studenti e applicazione delle abilità precedentemente apprese. Nelle concezioni dei docenti sull'insegnamento del problem solving in matematica, sono enfatizzati approcci concreti e pratici.*

Parole chiave: insegnante di primaria, concezione, problem solving, matematica

Resumen. *Según el currículo (NBE, 2004), mejorar las habilidades de los estudiantes en la actividad de problem solving es un objetivo importante. El papel de los docentes es fundamental para alcanzar los objetivos del currículo. En particular, sus concepciones influyen en las decisiones que toman cuando enseñan matemática. El objetivo de este trabajo es el de entender qué tipo de concepciones tienen los docentes de la escuela primaria en relación con el problem solving y de su utilización en la enseñanza en matemática. Los datos se recogieron con un cuestionario compuesto por preguntas abiertas durante abril y mayo de 2006 y de 2007. Todos los* *docentes de primaria (de primero a sexto) de la ciudad de Kerava (un total de 103 docentes) en el sur de Finlandia se sometieron a un test, pero sólo el 41% lo respondió. Según los docentes, el problem solving matemático implica varios problemas, estrategias, matemática de las situaciones cotidianas, pensamiento personal del estudiante y aplicaciones de las habilidades precedentemente adquiridas. En las concepciones de los docentes sobre la enseñanza del problem solving en matemática, se enfatizan una dirección concreta y práctica.*

Palabras clave: docente de primaria, concepciones, problem solving, matemática

1. Introduction

In Finland we have a nine-year comprehensive school where all children learn in heterogeneous classes. The class size varies between 20–30 pupils, and therefore teachers have difficulties in balancing between low-attainers and successful pupils, especially in upper grades (grades 7–9). After the comprehensive school, about half of the age cohort selects to continue in upper secondary school (3–4 years). In mathematics, there are two options for students to select: general mathematics and advanced mathematics. After the upper secondary school, there is the matriculation examination where mathematics is optional; about one third of all students take mathematics. See more on the Finnish school system in the published book Pehkonen, Ahtee, and Lavonen (2007).

To mathematical problem solving it is given much emphasis in the planning of Finnish basic education. This can be seen, among others, in the basics of the recent national curriculum for the comprehensive school (NBE, 2004). In the basics given to schools by the National Board of Education, it is defined that mathematics teaching in the comprehensive school delivers to pupils mastering of mathematical concepts and the most common solution methods in basic mathematics. Another objective of teaching is that it should develop pupils' mathematical thinking, and conduct pupils to find, elaborate and solve problems. Mathematics teaching influences pupils' spiritual growth and teaches purposeful performance. In the descriptions of key contents and good achievement for different grades, it is repeated the emphases of mathematical problem solving and thinking skills, from even the very first years of school (ibid).

2. Theoretical background

2.1. Problem solving in mathematics teaching

Problem solving has generally been accepted as a mean for advancing thinking skills in school (e.g. Schoenfeld, 1985). And this objective can be read also in the Finnish curriculum (NBE, 2004). But the basic concepts, 'problem' and 'problem solving' seem still to be rather ambiguous in mathematics education. Sometimes a 'problem' is understood to be a simple arithmetic task that can be solved in a routine way, whereas at other times it means a more complex situation. The fuzziness of problem solving concepts is discussed e.g. in Pehkonen (2001).

The nature of problem solving has been described in the literature with the help of problem solving models (e.g. Mason, Burton, & Stacey, 1985; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985). Polya's four-step model that is today about 60-year-old might be the most common one: Understanding the problem, Devising a plan, Carrying out the plan, Looking back (Polya, 1945). The problems in Polya's model have been the oversimplified structure of the model, the model looks like a receipt. But real problem solving is not possible via following such a scheme, the solver needs to use his/her own creativity. Therefore, the model is modified by other researchers, usually by refining some step/ steps. One of these refinements is the model that Schoenfeld has used. After him the problem solving process goes through the following five stages: Read, Analyze, Explore, Plan, Implement, Verify (Schoenfeld, 1985).

Another point of critics is that most of these models are linear, and in reality exploring new mathematics (i.e. problem solving) is not linear, not so systematic. Until Mason et al. (1985) have developed such a model for problem solving that corresponds the reality of mathematical exploration. The model has only three phases: Entry, Attack, Review, since the authors have combined the two middle steps in Polya's model. But their key idea is that between the phases Entry and Attack there is a mulling circle in the following sense: In the Entry phase, the solver gets a possible solution idea (AHA!), and he/she tries to follow it as far as possible. But earlier or later he/she will get STUCK!, and is compelled to fold back to the Entry phase. The mulling in this circle will end until when the solver finds a correct way out, i.e. when he/she solves the problem (Mason et al., 1985, p. 131).

Another way of considering the mulling circle is the way Kiesswetter deals it with the elementary graph theory (Kiesswetter, 1983): He speaks about a solver's material graph (the knowledge structure) on the problem that he/she develops. Mulling from AHA to STUCK and back means that the solver enriches his/her material graph, finding new connections between the previous facts. This continues as long as the solver can see the solution in his/her material graph, thus he/she has developed a solution graph, i.e. solved the problem.

Mason's interpretation of problem solving is compatible to constructivist understanding of learning (e.g. Davis, Maher, & Noddings, 1990). One promising method for mathematics teaching seems to be the so-called "open approach". In that teaching conception, the teacher offers his/her class an open learning environment, in the form of an open-ended problem (Pehkonen, 2001). His/her aim is to develop pupils' mathematical problem-solving skills, and to give pupils an opportunity to learn on their own way and at their own rate. For this purpose we can use open tasks that have been accepted as a promising solution in order to create a proper learning environment.

Teaching problem solving is challenging for a teacher in three different ways (Burkhardt, 1988): It is *mathematically* challenging, since he/she must understand and master the mathematics needed as well as the properties of pupils' different solution models. It is *pedagogically* challenging, since the teacher should decide when to let a pupil continue and when to stop his/her working as well as to know what kind of advices and hints will help the pupil further. As the third point, it is challenging on a *personal level*, since in problem solving it might occur such a situation, where the teacher does not even him/herself know how to continue, and to meet such a situation is to most people a very painful feeling.

2.2. Teachers' mathematics-related conceptions

In earlier studies, it has been noticed that teachers' conceptions are of paramount importance when trying to understand teaching situation (e.g. Cooney, 1985, 1988; Grouws, Good, & Dougherty, 1990; Thompson, 1988). Teachers' conceptions develop through their own experiences from teaching. Naturally teacher pre-service and in-service education forms also their understanding on teaching problem solving.

There is a big variety of answers to the question "What is mathematics?" which hints that there is not only one understanding of mathematics, but several different views of mathematics. And not in the sense that there is only one *right* view of mathematics and the others are *wrong*. Philosophers of mathematics (e.g. Hersh, 1997), and mathematics education (e.g. Ernest, 1998) have introduced several *right* views of mathematics that are also accepted among mathematicians. The same is valid also in problem solving: everybody has his/her own understanding of problem solving that was clearly shown e.g. in the study of Stecher and Mitchell (1995). Therefore, the study on teachers' conceptions and their development is important.

But conception is problematic as a concept, since it is connected to many neighbourhood concepts, as belief, view, attitude, knowledge, and they are not clearly defined (Furinghetti & Pehkonen, 2002). The following characterization is used in the literature (Pehkonen & Hannula, 2004): An individual's *beliefs* are understood in a rather wide sense as his/her subjective, experience-based, often implicit knowledge and emotions on some matter or state of art. Furthermore, we explain conceptions as conscious beliefs. In the case of conceptions, we understand that the cognitive component of beliefs is stressed, whereas in basic (primitive) beliefs the affective component is emphasized.

School experiences have a remarkable role in the birth of mathematics-related beliefs and conceptions. Research results have revealed an alarming devil's circle: It seems that teachers will teach, as they have been taught. And their pupils will continue as future teachers in the same devil's circle. Teachers will select teaching topics and make decisions on the organization of teaching based on their beliefs, conceptions and attitudes about mathematics and it's teaching. Such beliefs, conceptions and attitudes are based on their own school-time experiences on mathematics (Lindgren, 1996).

2.3. Earlier research on teachers' conceptions of problem solving

Within last 20 years, there are published several studies on teachers' conceptions of problem solving. Here we discuss briefly six of them, as examples. Burns and Lash (1988) examined how teachers' conceptions about teaching mathematics influence the manner in which they plan instruction in mathematical problem solving. Results demonstrated that teachers had a limited knowledge of teaching techniques and that teachers' concerns focused more on collection of materials and resources than on how to teach problem solving.

Grouws et al. (1990) interviewed 25 lower secondary school teachers concerning their beliefs and teaching practices; especially problem solving was emphasized. Teachers' definitions for problem solving could be classified into four groups: Problem solving means (1) verbal tasks, (2) finding solutions for tasks, (3) solving practical tasks, (4) solving tasks demanding thinking.

Pehkonen (1993) investigated Finnish teacher educators' conceptions on the implementation of problem solving. The data was gathered with a questionnaire from 43 teacher educators in a Problem Solving seminar. The results could be suppressed into four points: Problem solving is important, since it helps the fostering of pupils' cognitive readiness. Teaching problem solving should be carried out in a creative, flexible and approving manner. Teachers should involve pupils in problem solving through letting them solve their own problems. Pupils' readiness to study problem solving was considered the most important prerequisite for teaching problem solving.

Stecher and Mitchell (1995) examined the impact of portfolio assessment program by exploring 20 fourth-grade teachers' conceptions of problem solving. Teachers indicated that program has enhanced their understanding of mathematical problem solving and broadened their instructional practices. At the same time they admit that they have encountered difficulty in understanding certain components of the reform and making relevant changes.
Verschaffel, De Corte, and Borghart (1997) administered fourteen word problems, half of which were problematic from a realistic point of view, to 332 Belgian pre-service elementary school teachers who also saw answers given by four students. Results revealed a strong tendency to exclude real-world knowledge from spontaneous solutions and appreciations of student-supplied answers.

Pehkonen (1999) dealt with in-service teachers' conceptions on open tasks.

Lower secondary teachers (N=74), selected at random, answered a postal survey (the answering percentage was about 50%) inquiring their knowledge about open tasks. The results can be summarized, as follows: About a half of test subjects were not acquainted with the concept "open task". There are good reasons to believe that the non-respondents did not know the concept. Therefore, one may conclude that approximately only one quarter of the Finnish lower secondary school teachers is familiar with the term "open task".

2.4. Focus of the paper

In conformity with the curriculum (NBE, 2004), improving pupils' problem solving skills is important. Teachers' role is crucial in carrying out the objectives of the curriculum. Especially their conceptions influence decisions they make when preparing their lessons and when teaching mathematics. The aim of this paper is to figure out: What kind of conceptions Finnish elementary in-service teachers have concerning problem solving and it's teaching in mathematics?

3. Methods

A questionnaire with open questions was given to all elementary in-service teachers (grades 1–6) of the city of Kerava during the springs 2006 and 2007. Kerava is a small city in southern Finland, about 30 km to the north from Helsinki. There are 103 elementary teachers in Kerava, but we received responses only from 42 of them. In order to improve the response rate different methods were used, e.g. the questionnaire was sent again to elementary teachers in Kerava, but it had no significant result. It resulted only a couple of more replies. Thus, the reply rate was unfortunately as low as 41%. The paper at hand is mainly based on the unpublished master's thesis (Sivunen, 2007).

The questionnaire used was constructed especially for the study. It contained of six open questions, and usual closed background questions, concerning gender, age, qualification, specialization in mathematics, and teaching experience. The open questions were, as follows:

- What does problem solving mean for you in mathematics teaching?
- Why is problem solving a part of the mathematics curriculum according to your view?
- How should problem solving be taught in mathematics?
- How can you see problem solving in your mathematics teaching?
- What kind of facilities do you have to teach problem solving in mathematics?
- What kind of obstacles have you experienced when teaching problem solving in mathematics?

On the one hand since the group of the respondents was so small, teachers were not divided into sub-groups according to the grade they teach this year, i.e. the background questions were not used. On the other hand Finnish teachers are usually moving from one grade to another with their pupils; therefore, they cannot be labelled as a teacher of one certain grade. The method of content analysis was used in analyzing the research material.

4. On results and their interpretation

From the teachers' responses, their conceptions on problem solving and its teaching could be classified with the method of content analysis into three groups: (1) on the meaning of the curriculum, (2) on the meaning of teaching materials, (3) on teaching of problem solving skills.

4.1. On the meaning of the curriculum

The purpose of mathematics teaching to support through problem solving pupils' development in data dealing and elaborating (NBE, 2004) is very up-to-date. The emphasis in teaching is set in mastering of mathematical calculations and concepts. And teaching of problem solving skills is totally left away from the key contents of mathematics before grade 6 in the comprehensive school. They will be assessed, but there is no framework to teach them. As if school administration thinks that they will be developed automatically when working with mathematical routine tasks. Development in problem solving demands much time from pupils.

The following quotes from the teachers' responses emphasize the meaning of curriculum:

> The only problem is the limitedness of time. In the curriculum there are too many topics, in order we had time enough to concentrate on problem solving.

> The lack of time. In the curriculum there are so many topics to be taught that problem tasks seem to have less time, if one will not give special attention to it.

> Hurry. Too many basic topics to be taught. Low-attainers need time and support in basic topics.

> The lack of time. The requirements of the curriculum behind one's neck, a teacher has not always courage to stop and give children time to think.

The problematic situation described above can be seen also in the teachers' conceptions on teaching problem solving. In line with the teachers' conceptions, there are so many content topics written in the curriculum that there does not seem to be enough time for teaching problem solving. Here we can conclude that the teachers define mathematical topics to be taught just via the material objectives written in the curriculum and named "key topics". Thus they leave the formal objectives where problem solving is written also in the case of lower grades, for less attention when planning their instruction. In relation to conceptions of the teachers participating in the study, there is not enough time for problem solving, since there are many so-called “basic topics” in mathematics teaching that pupils should rule. Here they think that learning of mathematical “basic skills” is in the objectives hierarchically higher than problem solving skills. Teachers seem to consider these two skills as separated from each other.

Based on this conception it is very understandable that there is too little time for problem solving in mathematics curriculum and instruction, and consequently only brilliant pupils are working with problem solving. There is a danger that low-attainers in mathematics will work mainly with basic routine tasks every year. The teachers told that they use in mathematics problem-solving tasks as additional tasks with which they differentiate their teaching, especially in the case of talented and motivated pupils.

On the one hand, the teachers participating the study expressed the conception that problem solving means the application of earlier learned mathematical knowledge and skills. This could be interpreted that according to the teachers’ conceptions pupils should rule calculations before they use them in problem solving. Similar thinking is also reflected from the curriculum (NBE, 2004). On the other hand, the teachers expressed that teaching problem solving needs much time according to their understanding. The teachers seem to be in a very embarrassing situation. They see the importance of problem solving as a part of mathematics teaching, but they are not able to implement such a teaching that corresponds their conceptions because of outer pressure, as those from the curriculum, since there are many content objectives and not enough time. To this social context belongs also the curriculum used that seems to be in contradiction with the teachers’ conceptions when the focus is the material objectives of the curriculum.

If problem solving is understood to be a part of mathematics teaching, its position is not a separate one, but it will have a very central position as a teaching method and as a content to be learned. Such a problem-centered approach is also written in the curriculum (NBE, 2004). The aim is to approach problem-centered topics to be taught in mathematics. In the data at hand, there is not to be seen such a teacher conception on problem solving. Only two respondents (from 43 teachers) mentioned sometimes to use problem solving when approaching a new topic to be learned.

4.2. On the meaning of teaching materials

Teaching materials raised often in the analysis of the data. When the teachers participating the study were asked what they would mean with problem solving, the main idea that emerged was that problem solving means certain kind of tasks. The teacher described these tasks with some characteristics features. In conformity with the teachers, problem-solving tasks demand from pupils independent creative thinking, reasoning and applying. Tasks can be in verbal or visual form, and they should be new for pupils. Tasks used should also be connected with practical everyday situations.

The following comments from the teachers' responses introduce the meaning of teaching materials:

> Already a verbal task is problem solving. Different tasks that require many-sided creative thinking. The mere mechanical mastering of topics is not enough, application is required.
>
> Application of learned skills.
>
> Verbal, picture, non-mechanical tasks, all they train independent thinking.
>
> Application tasks. Tasks where one is compelled to apply a learned topic in a new situation.
>
> I use the material of textbook authors, as different verbal, picture-puzzle tasks. Traditional verbal tasks are tried to solve in the way that different (several) solutions are pondered.
>
> One is compelled to collect tasks, if he/she is not willing to stick in the tasks of the textbook. It is rather tedious.

Most of the teachers participating the study expressed their similar worry on the state of mathematical teaching materials. They were experienced to contain too little material proper for teaching problem solving. However, most of the teachers responding the questionnaire told that they use in mathematics teaching much textbook and its teachers' guidebook. The teachers had the feeling that especially the teachers' guidebook helped them in teaching problem solving. Although some of the teachers told that they use material outside of the textbook, the use of textbook was clearly emphasized in the data. The teachers spoke about verbal tasks. In line with the teachers' conceptions, these tasks can be used in teaching problem solving when different solution alternatives are discussed with pupils. These problems are, however, closed in their nature, and therefore, there is a very limited amount of solution methods. The teachers also told that they use in problem solving mathematical puzzles and pondering problems presented in different verbal or visual form, as well as mathematical learning games.

In relation to the teachers' conceptions, teaching material was experienced as a hindering factor for teaching problem solving. Research results show that the teachers use in their teaching material that suits poorly for teaching problem solving according to their conceptions. This could be explained with the teachers' statement that searching, gathering and producing proper material for teaching problem solving is tedious work and demands time. The teachers implement well problems connected with teaching materials, but they are not able to fix them according to their own understanding.

4.3. Teaching of problem solving skills

Teaching problem solving skills is not contained into the material objectives of mathematics curriculum for lower grades (grades 1–6) of the comprehensive school (NBE, 2004). In the responses of the teachers participating to the study, one can see that problem solving in mathematics teaching means the use and studying of different strategies. According to the teachers, strategies are needed in solving problems. A pupil selects and combines proper strategies with his/her logical thinking for solving a problem.

The following quotes from the teachers' responses in the questionnaire stress the teaching of problem solving skills:

> To study strategies with which the solver can solve new types of tasks, i.e. problems.

> A pupil selects him/herself what strategy he/she is using. There is not always necessarily a 'ready formula' taught what the pupil can use.

> A teacher can model and teach step-by-step thinking in stages, i.e. to teach thinking strategies: to illustrate with different models, blocks, etc.

In the teachers' conceptions on how problem solving should be taught in mathematics, there is also an idea that a teacher should act as a leader for problem pondering who illustrates, gives examples and opens problems. The teacher should also explain his/her own thinking during the solution process to his/her pupils, as well as give them information on reason-cause-relationships and on different problem solving strategies. The teachers mention here such strategies as advancing of step-by-step and dividing the problem into sub-problems. The teachers speak also about a process-oriented approach that in conformity with their conceptions suits well to teaching problem solving. In that case the teacher acts as a guide for the process. In line with the teachers' conceptions, their task is also to select problems to be dealt with.

The teachers' conceptions connected with teaching problem solving reflect also their conceptions on their own teaching of problem solving. In relation to the teachers' conceptions, teaching problem solving skills can be seen in their instruction as pondering of different solution alternatives. With this they mean the method they used in solving verbal mathematical problems, where the class under the teacher's guidance ponders possible solution procedures for the problem at hand.

Teaching problem solving skills is, however, not emphasized in the teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching. Only a small group of teachers mentioned problem-solving skills in some form or other in their conceptions. Based on the data one may conclude that a part of the teachers experiences that teaching and practicing problem solving skills belongs to mathematics teaching, but they do not express any established practices how they teach these skills. The only practical hint in the data is the pondering of different solution alternatives when solving verbal tasks.

Similarly pupils' own thinking and their thinking skills are understood to be a part of the nature of problem solving. In the teachers' conceptions on their own teaching of problem solving, it is emphasized instead of problem solving skills the teaching materials used and their tasks, as well as the time their pupils use for problem solving during mathematics lessons.

5. Discussion

According to the teachers, problem solving in mathematics means various problems, strategies, mathematics in everyday situations, pupils' own thinking and applying previously learned skills. In the teachers' conceptions of teaching problem solving in mathematics, concrete and practical approaches are stressed. However, in the teachers' own mathematics instruction the significance of teaching materials was emphasized.

Concerning their conceptions about the resources to teach problem solving, the teachers established the importance of education, experience and teaching materials. In the teachers' conceptions, it was stressed as obstacles for teaching problem solving when there are insufficient time to teach problem solving as well as pupils' poor skills and resources. Similar obstacles were seen also in the questionnaire responses of the Finnish teacher educators about fifteen years ago (Pehkonen, 1993). Additionally problem solving is not in the core content of mathematics in lower elementary grades, and therefore, the teachers feel that there is not enough time to teach it. Curricula, teaching materials and the teachers seem to emphasize pupils' basic calculation skills more than their problem solving skills, and they seem to consider these as separate contents.

In the data of the study, one can read the pedagogical challenge of teaching problem solving for a teacher (Burkhardt, 1988). The teachers told how they balance with their large teaching groups that contain very different-level pupils of their knowledge, skills and learning abilities. Some pupils are interested in mathematics and well motivated to work with problem solving. Whereas some other pupils experience even mathematics to be difficult, and might refuse fully to work with tasks if they do not immediately get guidance for the correct way to solve and to the solution. On the one hand, the teachers put forward also the insufficiency occurring at times of their own skills in these challenging situations. It was felt often difficult to give correct hints and advices to different pupils in due time. A part of the teachers pondered how to guide a pupil in such a way that the true solving was left to the pupil self. On the other hand, there are also some teachers in the group of the respondents whose experience and own interest in problem solving had helped them forward in finding own teaching methods and proper materials.

Kush and Ball (1986) displayed a classification of teachers' conceptions on mathematics teaching and learning. In the teachers' conceptions of the study, there are elements of content-oriented conceptions given in this classification. Kush and Ball divide these conceptions into two groups: those emphasizing understanding and those emphasizing calculation skills. In the data of the study at hand, it is not possible to do a covering and reliable analysis on the teachers' conceptions in relation to the classification of Kush and Ball (1986), because the group of respondents with conceptions on a teacher's role is very small. Generally it can be stated that in the teachers' conceptions on their own role in teaching problem solving, there are mainly teacher-centred teaching methods. Only two respondents of 43 mentioned teaching problem solving with a process-oriented approach.

It is interesting to notice that teachers' conceptions of problem solving have not much developed in the time slot of 20 years: Burns and Lash (1988) reported that teachers had a limited knowledge of teaching techniques and that teachers' concerns focused on collection of materials. Also Grouws et al. (1990) singled out that teachers' interests in problem solving means mainly verbal tasks and their collection. Those results are in line with our findings. Similar results came also from Finnish teacher educators (Pehkonen, 1993) and from Finnish teachers of the third-grade (Näveri el al., 2011). Thus, teachers' conceptions seem to change very slowly, if at all.

5.1. Concluding note

Some of the teachers in the study expressed that they need in-service education in teaching problem solving. In the data, the emphasis was remarkably in the meaning of in-service education for teachers' ability to teach problem solving. Some teachers told also that their teacher education has not provided enough means to teach problem solving, or these means were not sufficient. Similar concerns were expressed about problem solving also earlier by the Finnish teacher educators (Pehkonen, 1993).

The teachers' conceptions on problem solving belongs to a larger totality that includes at least teachers' conceptions on the nature of mathematics (e.g. Ernest, 1998), its teaching (e.g. Kush & Ball, 1986) and learning. Therefore, the change of teachers' conceptions on problem solving is a large process that demands before all a teacher's own reflective thinking (Thompson, 1984). In the published paper (Pehkonen, 2006), it is pointed out that such a conceptual change might also be a radical one (e.g. Merenluoto, 2005), and therefore, the most complicated one.

Although the development in teaching problem solving in Finland has not been as rapid as expected, there are some changes to be observed (Pehkonen, Hannula, & Björkqvist, 2007). The use of problem solving tasks is quite popular today in Finnish mathematics lessons, but mainly in the form of mathematical puzzles. If we use the language introduced by Schroeder and Lester (1989), we might say that only very few teachers are teaching *via* problem solving, while most of them teach something *about* problem solving.

The latter means that they might use some mathematical puzzles in their teaching or have a problem box in their class or something similar. And the former states that these teachers use problem solving as a teaching method, and that is very rare.

References

Burkhardt, H. (1988). Teaching problem solving. In H. Burkhardt, S. Groves, A. H. Schoenfeld, & K. Stacey (Eds.), *Problem solving—A world view: Proceedings of Problem Solving Theme Group, ICME-5* (pp. 17–42). Nottingham (England): Shell Centre for Mathematical Education.

Burns, R. B., & Lash, A. A. (1988). Nine seventh-grade teachers' knowledge and planning of problem-solving instruction. *Elementary School Journal*, *88*(4), 369–386.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(5), 324–336.

Davis, R. B., Maher, C. A., & Noddings, N. (Eds.) (1990). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics.* JRME Monograph Number 4. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ernest, P. (1998). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of belief. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39–57). Dordrecht: Kluwer.

Grouws, D. A., Good, T. A., & Dougherty, B. J. (1990). Teacher conceptions about problem solving and problem-solving instruction. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12Th Pme-Na Conference (14Th, Mexico, July 15–20, 1990)*, *1*, 135–142.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Kiesswetter, K. (1983). Modellierung von Problemlöseprozessen. *Mathematikunterricht*, *29*(3), 71–101.

Kush, T. M., & Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domain of knowledge, skills and dispositions*. East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.

Lindgren, S. (1996). Prospective teachers' math views and educational memories. In E. Pehkonen (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs III: Proceedings of the Mavi-3 Workshop (3 Rd, Helsinki, Finland, August 23–26, 1996).* (Research Report 170, pp. 53–58). University of Helsinki.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Wokingham (England): Addison-Wesley.

Merenluoto, K. (2005). Discussion about conceptual change in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *10*(2), 17–33.

Näveri, L., Pehkonen, E., Ahtee, M., Hannula, M. S., Laine, A., & Heinilä, L. (2011). Finnish elementary teachers' espoused beliefs on mathematical problem solving.

In B. Rösken & M. Casper (Eds.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVII: Proceedings of the MAVI-17 Conference* (pp. 161–171). University of Bochum, Germany.

NBE. (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004* [Basics for the curriculum of the comprehensive school]. Opetushallitus. Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy.

Pehkonen, E. (1993). What are Finnish teacher educators' conceptions about the teaching of problem solving in mathematics? *European Journal for Teacher Education*, *16*(3), 237–256.

Pehkonen, E. (1999). In-service teachers' conceptions on open tasks. In G. Philippou (Ed.), *MAVI-8 Proceedings, Research on Mathematical Beliefs* (pp. 87–95). Nicosia: University of Cyprus.

Pehkonen, E. (2001). Offene probleme: Eine methode zur entwicklung des mathematikunterrichts. *Mathematikunterricht*, *47*(6), 60–72.

Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? In L. Häggblom, L. Burman, & A-S. Röj-Lindberg (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (pp. 77–87). Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten, Specialutgåva Nr 1/2006. Vasa.

Pehkonen, E., & Hannula, M. (2004). Mathematical belief research in Finland. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *9*(2), 23–38.

Pehkonen, E., Ahtee, M., & Lavonen, J. (Eds.) (2007). *How Finns learn mathematics and science?* Rotterdam: Sense Publishers.

Pehkonen, E., Hannula, M. S., & Björkqvist, O. (2007). Problem solving as a teaching method in mathematics education. In E. Pehkonen, M. Ahtee, & J. Lavonen (Eds.), *How Finns learn mathematics and science* (pp. 119–129). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton (NJ): Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando (FL): Academic Press.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (NCTM 1989 Yearbook). Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Sivunen, M. (2007). *Luokanopettajien käsityksiä ongelmanratkaisusta matematiikan opetuksessa* [Elementary teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching]. Pro gradu –tutkielma (julkaisematon moniste). Soveltavan kasvatustieteen laitos. Helsingin yliopisto.

Stecher, B. M., & Mitchell, K. J. (1995). *Vermont teachers' understanding of mathematical problem solving and "good" math problems* (CSE Technical Report 400). Los Angeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational studies in Mathematics*, *15*(2), 105–127.

Thompson, A. (1988). Learning to teach mathematical problem solving: Changes in teachers' conceptions and beliefs. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (pp. 232–243). Reston,

VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 339–359.

Secondary school students' beliefs and attitudes about errors in mathematics and the formation of their MWS

Theodora Christodoulou, Iliada Elia,
Athanasios Gagatsis, and Paraskevi Michael-Chrysanthou
Department of Education, University of Cyprus

Abstract. *The present article describes the first part of a survey which investigates lower secondary school students' beliefs about formative assessment in mathematics. Based on students' beliefs related to formative assessment, this research is a first attempt to propose an appropriate MWS for the secondary education students, regarding to the handling of the error in mathematics classroom. Four hundred twenty eight lower secondary school students completed a questionnaire about the formative assessment. The present article concentrates on students' beliefs about the use of mathematical errors and how the use of errors in mathematics can create a suitable MWS. The findings of the study reveal that the students focus on the suitable MWS rather than their personal MWS for the process of elaborating their errors. They consider the role of the teacher in the formative use of the mathematical error as the most significant element. Furthermore, the interaction between the students about their errors is essential for them.*

Keywords: formative assessment, mathematical error, attitudes, beliefs, conceptions, MKS (mathematical working space)

Sunto. *Il presente articolo descrive la prima parte di uno studio che indaga sulle credenze degli studenti della scuola secondaria circa la valutazione formativa in matematica. Sulla base delle credenze degli studenti relative alla valutazione formativa, questa ricerca è un primo tentativo di proporre un adeguato MWS (spazio di lavoro matematico) per gli studenti dell'istruzione secondaria, per quanto riguarda la gestione dell'errore di matematica in aula. Quattrocentoventotto studenti della scuola secondaria hanno completato un questionario sulla valutazione formativa. Il presente articolo si concentra sulle credenze degli studenti circa l'uso di errori matematici e come l'uso di errori in matematica sia in grado di creare un adeguato MWS. I risultati dello studio rivelano che gli studenti si concentrano solo sugli MWS adatti, piuttosto che sui loro MWS personali per il processo di elaborazione dei loro errori. Essi considerano il ruolo del docente nell'uso formativo dell'errore matematico come l'elemento più significativo. Inoltre, l'interazione tra gli studenti sui loro errori è secondo loro essenziale.*

Parole chiave: valutazione formativa, errore matematico, atteggiamenti, credenze, MWS (spazio di lavoro matematico)

Resumen. *El presente artículo describe la primera parte de un estudio que indaga sobre las creencias de los estudiantes de secundaria en relación con la evaluación* *formativa en matemática. Sobre la base de las creencias de los estudiantes en relación con la evaluación formativa, esta investigación es un primer intento de proponer un adecuado MWS (espacio de trabajo matemático) para los estudiantes de instrucción secundaria, por lo que respecta la gestión del error de matemática en el aula. Cuatrocientos veintiocho estudiantes de la escuela secundaria completaron un cuestionario sobre la evaluación formativa. El presente artículo se centra en las creencias de los estudiantes en referencia al uso de errores matemáticos y de cómo el uso del error en matemática ayude a crear un adecuado MWS. Los resultados del estudio revelan que los estudiantes se concentran únicamente en los MWS adecuados, y no en los MWS personales por el proceso de elaboración de sus errores. Ellos consideran el papel del docente en el uso formativo del error matemático como elemento de mayor significación. Además, la interacción entre los estudiantes y sus errores es según ellos esencial.*

Palabras clave: evaluación formativa, error matemático, actitud, creencias, MWS (espacio de trabajo matemático)

1. Introduction

Mathematics is a multi-functional and multi-disciplinary subject in school. This is the reason why the teachers need to be aware of their crucial position in school and their need to reflect on difficulties and mistakes, in order to find the causes of them and to plan the interventions for remedial programming, through efficacy strategies and tools of formative assessment. Recent international research (e.g. Eurydice, 2012; OECD, 2012) have determined five main difficulties in mathematics learning. One of them highlights the incorrect use of formative assessment and the need to introduce strategies of teaching and learning individualization (OECD, 2005; Weeden, Winter, & Broadfoot, 2002).

In fact, formative assessment (with its diagnostic function) allows calibrating the instructional strategies and differentiating them according to learners' needs. Formative assessment is essential in order to take valid and meaningful decisions to design activities, tools, materials and technologies, differentiated by learning levels and styles (Weeden, Winter, & Broadfoot, 2002). Moreover, formative assessment allows identifying the "critical steps" of mathematics and it also offers a clearer view of students' learning problems and addresses towards the most appropriate strategies to support and motivate students' learning. For this reason, Heritage (2013) highlights the need to investigate the mathematicians' beliefs and misconceptions about assessment in the classroom. He also, claims that it is essential to analyse learning activities in the classroom, investigating on teachers' rationales behind learning difficulties in mathematics in order to plan adequate interventions for remedial programming (Heritage, 2013).

The last years a lot of efforts have been done in research of mathematics education on models and modelling of mathematical works. All these researches will concentrate in this paper on the model of MWS, which was the object of multiple researches concerning the cognitive and epistemological analysis of different mathematical concepts. However, it seems that the model of Mathematical Working Space (MWS) does not take explicit account of the research in the affective domain in Mathematics education. Nevertheless, students' (and teachers') beliefs, attitudes and conceptions about the nature of mathematics, their skills in mathematics, the errors in mathematics, the causes of errors in mathematics and also the role of representations in teaching and learning of mathematics, can clearly contribute to the formation of three vertical axis (i.e. semiotic genesis, instrumental genesis, discursive genesis). Thus, the present study aims to enrich the model of MWS, emphasizing in the affective domain in Mathematics education.

2. Theoretical framework

2.1. Formative assessment in mathematics

Definitions and purpose of formative assessment

> Formative assessment, including *diagnostic testing*, is a range of formal and informal assessment procedures employed by teachers during the learning process in order to modify teaching and learning activities to improve student attainment (Crooks, 2001). It typically involves qualitative feedback (rather than scores) for both student and teacher that focuses on the details of content and performance (Huhta, 2010). It is commonly contrasted with *summative assessment*, which seeks to monitor educational outcomes, often for purposes of external accountability (Shepard, 2005). ("Formative assessment", n.d.)

Among the many different definitions of *formative assessment* (FA) provided by different researchers, common points occur to be emphasized in them. Many of these definitions put the teacher – student relation in the centre of the assessment process. For instance, Black and William (1998) define FA as the method that represents all classroom activities that are performed in classroom settings by either educators and/or their students and employ both of them in the process. This definition of FA highlights the interaction between the teacher and the student during the teaching and learning process. Other definitions about FA highlight its role for modifying the teaching and learning process based on the students' performance. For example, Van De Walle, Karp, and Bay-Williams (2013) claim that FA is "an along the way evaluation that monitors who is learning and who is not and helps teachers to form the next lesson" (p. 5).

A definition that combines all the previously stressed points is the one provided by Popham (2008, p. 5) and it is accepted by the Formative Assessment for Teachers and Students (FAST) group as the most accessible to educators (Clark, 2011). According to this definition, FA is "a process used by teachers and students during instruction that provides feedback to adjust ongoing teaching and learning to improve students' achievement of intended instructional outcomes" (Popham, 2008, p. 5).

The formative use of mathematical errors

The use of students' errors is an important dimension of FA, as it helps the teachers modify their techniques for helping the students correcting them, but also the students in identifying their weaknesses and try overcoming them. Wragg (2001) supports that "if students learn from their assessment, then the correction of errors and the discussion of what they have done is essential" (p. 74).

In fact, the identification of mistakes helps teachers decide how to identify and meet pupils' learning needs and how to use their teaching time and their resources (Kyriakides, 1999). The reason on which the teachers attribute the errors will affect their decisions for their future intervention teaching techniques. In fact, the research community argues that the mostly important errors are due to epistemological obstacles (Brousseau, 1998) or to didactical obstacles (Brousseau, 1990). Therefore, the students' errors can have a formative use, as the teachers can exploit this information for modifying their future actions (Gagatsis & Kyriakides, 2000). Thus, decisions about the next learning steps follow from the formative identification of pupils' errors (Desforges, 1989). And this is particularly important, because a teaching plan which is organized in such a way might help teachers to plan class and individual programs of work according to the different performance levels of the pupils (Gagatsis & Kyriakides, 2000).

This article focuses on the students' beliefs concerning to the mathematical error. In specific, it investigates how the students believe that the teacher has to use the mathematical error in the class. Based on these beliefs, we tried to suggest an "appropriate" MWS for the secondary school students, as regards the handling of the mathematical error in this level of education.

In this paper, we focus on the dimension of the use of error in mathematics, because the error is the "heart" of learning mathematics. Mathematics' teaching and understanding comes from the errors in mathematics, because the errors cause discussion, communication and feedback between the subjects in mathematics' classroom. In a class of mathematics without errors, the students couldn't develop their mathematical thinking, because the absence of the interaction that the mathematical error causes between teacher-students and student-student deprives students to develop the semiotic and discursive genesis.

Although formative assessment can be conducted through different techniques (e.g. self-assessment, peer-assessment, feedback or use of error) we choose to deal with the use of mathematical error, because it includes feedback technique, self-assessment and peer-assessment technique. However, this study takes into account the students' beliefs about the use of error based on three dimensions: (a) use of error by the teacher (feedback technique), (b) use of error by the student who is wrong (self-assessment technique), and (c) use of error between the students (feedback and peer-assessment technique). Focused on the above three dimensions, we try to find potential consistencies in the students' beliefs, in order to propose an "appropriate" MWS, as the students perceive it, that helps them to increase their understanding in mathematics. More specifically, we will try to prioritize the above dimensions of the handling of error in mathematics, according to their contribution in the students' understandings in mathematics. For these goals of the study, we take into account the students' answers in the 25 statements of the questionnaire. However, the research in the mathematical error is not limited in the aforementioned three dimensions, but there are research concerning the causes of the mathematical error (e.g. Gagatsis & Kyriakides, 2000).

2.2. The affective domain of research in mathematics education

The second part of the theoretical framework, concerns the affective domain of research in mathematics education. Key terms in this research are attitudes, beliefs and conceptions.

As it comes from the literature, there are various opinions concerning the notion of "beliefs". According to Goldin (1999), a belief may be "the multiply encoded cognitive configuration to which the holder attributes a high value, usually a truth value, including associated warrants" (Goldin, 1999, as cited in Presmeg, 2002, p. 293). Cooney (1999), asserts that a belief is "a cluster of dispositions to do various things under various circumstances" (Cooney, 1999, as cited in Presmeg, 2002, p. 293), which leads to the acceptance that "different circumstances may evoke different clusters of beliefs" (Presmeg, 2002, p. 293). It is widely accepted that beliefs are the individual's personal cognitions, theories and conceptions that one forms for subjective reasons. Their nature is partly logical and partly emotional. According to Mc Leod (1992) "beliefs are largely cognitive in nature, and are developed over a relatively long period of time" (p. 579).

Many researchers use attitudes as a term which includes beliefs about mathematics and about self. Mc Leod (1992) accepts that attitudes "refer to affective responses that involve positive or negative feelings of moderate intensity and reasonable stability" (p. 581); they may appear as a result of the automation "of a repeated emotional reaction to mathematics" (p. 581) or of "the assignment of an already existing attitude to a new but related task" (p. 581). However, to address the varying terminology about knowledge, beliefs, belief systems, and belief clusters more efficiently, Thompson (1992) invoked conceptions "as a more general mental structure, encompassing beliefs, meanings, concepts, propositions, rules, mental images, preferences, and the like" (p. 130).

A "conception" is a mental construction or representation of reality (Kelly, 1991), communicated in language or metaphors (Lakoff & Johnson, 2003) and which explains complex and difficult categories of experience (White, 1994) such as assessment. Furthermore, conceptions represent different categories of ideas held by teachers behind their descriptions of how educational things are experienced (Pratt, 1992). Thus, conceptions act as a framework though which a teacher views, interprets and interacts with the teaching environment (Marton, 1981).

Students' beliefs about mathematics and assessment

Over the last two decades the role of beliefs, as well as the role of knowledge, in cognitive processes has been recognised. In particular, students' general beliefs about the nature and acquisition of knowledge, namely epistemological beliefs, have been investigated regarding their influence on text comprehension and metacomprehension (Kardash & Howell, 2000), problem solving (Schraw, Dunkle, & Bendixen, 1995), and conceptual change (Mason, 2000). Students' beliefs have been investigated not only as general convictions, but also as convictions about knowing and learning in specific domains, including mathematics (De Corte, Op't Eynde, & Verschaffel, 2002). Schoenfeld (1983) pointed out the existence of a system of beliefs that drives students' behaviour when trying to solve mathematical problems, since problem solving performance cannot be seen as purely cognitive. He revealed that students' beliefs about what is useful in learning maths affects the cognitive resources available to them when learning in this domain, making a large portion of stored information inaccessible when the beliefs impede rather than facilitate understanding. Furthermore, students' conceptions of assessment are of particular importance because assessment has a significant impact on the quality of learning (Ramsden, 1997).

The research literature on students' conceptions of assessment is not vast, and is largely focused on tertiary or higher education students (Struyven, Dochy, & Janssens, 2005). Review of the empirical literature on students' conceptions of the purposes of assessment has identified four major purposes, some of which can be matched to teachers' conceptions of assessment. Students are reported as conceiving of assessment as (a) improving achievement, (b) a means for making them accountable, (c) being irrelevant, and (d) being enjoyable.

2.3. Mathematical working space (MWS)

The model of Mathematical Working Space (MWS) was first developed for the geometry (Houdement & Kuzniak, 2006; Kuzniak, 2006), while a first approach to the concept and the MWS structure was made by Kuzniak (2011), based on the Geometrical Working Space (GWS).

According to Kuzniak (2011) the figural genesis, in the model of Geometrical Working Space and the visualization should be modified and re-interpreted by the processes of semiotic representation associated with the mathematical topic studied at a time. For this reason, the figural genesis converted to semiotic genesis, because the semiotic representations are the "heart" of mathematics and the basic principle of cognitive processes concerning the mathematics understanding. Below, the Figure 1 shows the model of Mathematical Working Space (MWS), as proposed by Kuzniak (2011) and Kuzniak and Richard (2014).

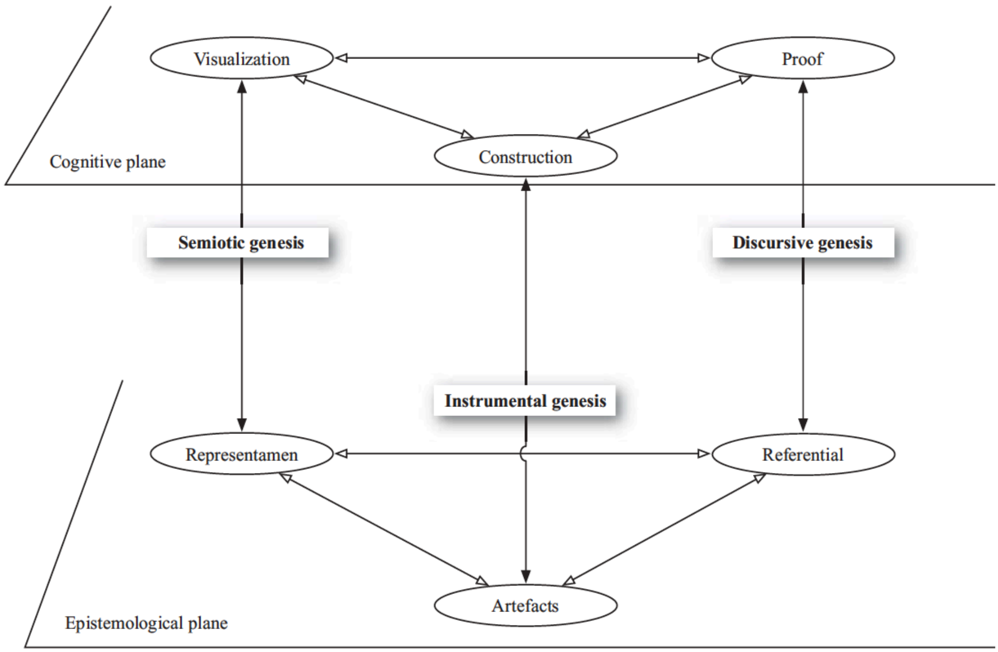

Figure 1. The model of Mathematical Working Space (MWS) (Kuzniak & Richard, 2014, p. 21).

The MWS consists of two components: epistemological and cognitive. In order for the epistemological component to be also applied to other mathematical areas except geometry, the model should be modified in MWS and be based on the concept of the sign or representation, which is the fundamental component of mathematical work, as introduced by Peirce (1839–1914). The semiotic genesis associated with semiotic representations of mathematical objects (provides the mathematical objects in tangible objects).

As regards the cognitive dimension of MWS, a visualization process linked to the figures' processing (mentally figures) and the intuition. In mathematics, the signs are usually visual in nature. Even the algebraic notations need to be visible either mentally or in written form.

According to Kuzniak, Tanguay, and Elia (2016) the structure of the epistemological and cognitive aspects within the MWS model aims to provide a tool for the study of mathematical work in which students and teachers are effectively engaged during mathematics notions and it allows the analysis of the mathematical activity of individuals dealing with mathematical problems. Based on the MWS model in the analysis of the mathematical activity we can observe the development of a concept, as a process of bridging the epistemological and the cognitive perspectives.

Three dimensions are discriminated in the model: semiotic, instrumental, and discursive genesis. Considerable research work has been done on the dimension of MWS referring to the semiotic representations, semiotic genesis, and visualization. This research approached several mathematical areas, such as geometry, arithmetic, probability and statistics, and other mathematical concepts at different levels of education (primary, secondary, university). These studies (Barrera, 2013; Gagatsis et al., 2016; Mora et al., 2016; Panero, Arzarello, & Sabena, 2016; Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016) promoted the important role of the semiotic aspects on the students' MWS. Gagatsis and his colleagues (2016) studied how the representational flexibility is developed in fractions and decimal numbers addition in connection with the MWS model. The findings of their research show that the axis of semiotic genesis in fractions and decimal numbers is not automatic, but requires a long process of small steps of development. Therefore, further research is needed to better understand how the visualization and semiotic representations can be used in a MWS, in order to achieve effective learning in mathematics.

The theory of the instrumental genesis developed by psychologists regardless of their socio-cultural approach in the mid 90's and many researchers (Mariotti, 2002) consider that it illuminates the process of internalizing the tools and the semiotic mediation they perform. It mainly refers to the artefacts, giving them specific capabilities and specific uses; however, the conversion of an artefact to a cognitive tool is succeeded via a complicated process, which does not necessarily lead to a deeper understanding of concepts (Guin & Trouche, 1998). Moreover, the instrumental genesis depends on the tasks assigned to each student. The development of the concepts by the students as a result of their interaction with the learning environment raises an important issue concerning the interpretation of the phenomena observed on a computer screen. As the different coordinated patterns are sequentially formed, so the relationship between the user and the artefact evolves: this process is called "instrumental genesis" (Mariotti, 2002).

The discursive genesis of MWS enables us to follow a theoretical approach to the analysis of the obstacles and difficulties encountered by students in their reasoning in a mathematical concept. This reasoning is produced in various formal or non-formal activities on the mathematical concept taught, as well as providing explanations about the meaning of the concept. Within this genesis we are able to identify and interpret the perceptions of students and their mistakes as they think about this concept. According to Kuzniak and Richard

(2014) the discursive genesis of the proof used by the properties combined together on the theoretical referential in order to put them in service to the mathematical reasoning and to a non-exclusively iconic, graphic, or instrumented validation.

3. Methodology

3.1 Participants

This study is a part of a survey in the context of a European Program,[1] named Formative Assessment of Mathematics Teaching and Learning (FAMT&L) (more details about the program can be found in Michael-Chrysanthou, Gagatsis, & Vannini, 2014). The particular study is also the first part of a doctoral thesis of Theodora Christodoulou in preparation, which aims to propose a model describing lower secondary school students' beliefs about FA and assessment in mathematics in general. Four hundred twenty eight lower secondary school students, that is, grade 7, grade 8, and grade 9 students participate in the study. A questionnaire focused on the beliefs about FA and assessment in mathematics in general was administrated to all participants.

3.2 Questionnaire

As we referred, the present study focuses on the first part of the whole survey. This part includes students' questionnaire about their beliefs towards FA and the concept of assessment generally. This questionnaire focuses on six axes.

The first axis investigates students' beliefs about the purpose of assessment. The statement "Assessment defines my good skills in mathematics" is an example of the statements which are related to this axis.

The second axis investigates students' beliefs about feedback, which is one of the major FA techniques. This axis consists of statements that fall in three dimensions: (a) feedback given by the teacher to the student (e.g. "When my teacher, gives me continuously information about my progress, I understand the mathematical concepts better"); (b) feedback that students give to each other – peer feedback (e.g. "I prefer not to discuss my solutions in mathematics with my classmates, in order to avoid their negative comments"); and (c) feedback given by the student to the teacher (e.g. "It is necessary to say my questions that I have about the course to the teacher at the end of the course"). The feedback among students includes the students' beliefs about peer-assessment, which is one of the FA techniques.

The third axis related with the use of errors in mathematics classroom both by the students and teachers and among the students. Students' beliefs about the use of errors by themselves were measured using statements such as "Correcting my mistakes alone, I understand the mathematical concept better".

[1] [538971-LLP-1-2013-1-IT-COMENIUS-CMP

Similarly, students' beliefs about the use of errors in mathematics by the teacher were investigated using statements such as "The teacher should use my mistakes in order to help me to overcome my difficulties in mathematics". Other statements such as "When I discuss my mistakes with my classmates, I have more motivation to participate in the lesson" were used for investigating the students' beliefs about the use of errors among the students. This dimension of the third axis includes students' beliefs about the peer-assessment technique in relation to the formative use of errors.

The fourth axis consists of statements that investigate students' beliefs about self-assessment, which is another FA technique. One of the statements of this axis is the following: "Self-assessment does not help me to face my difficulties in mathematics".

The fifth axis 5 includes statements that investigate students' beliefs about sharing learning goals with students and defining success criteria. This axis includes statements such as "When I am assessed in mathematics, I prefer to be aware about what my teacher expects to do" or "When I am aware about the goals of the course, I participate more in the lesson".

The last axis consists of statements that investigate students' beliefs about summative assessment and grades. This axis includes statements such as "Through the test I can see my difficulties in mathematics" or "To be succeeded in mathematics means to have good grades in the progress report".

The participants completed the questionnaire using Likert scale from 1 to 4 (e.g. 1-absolutely disagree, 2-disagree, 3-agree, 4-absolutely agree).

4. Results

The analysis of the data collected in this study were conducted using the computer software Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive (C.H.I.C.) (Gras et al., 2008), which gives the implicative diagrams and the similarities diagrams. This analysis in the present study indicates a hierarchical similarity between groups of variables (Lerman, 1981). In this article we analyse the axis about the use of error (third axis), because it is connected to the MWS and a probable suitable MWS of the students and of the teachers, as the students perceive it. The similarity groups appear in an ascending manner as a function of their strength. Thus, the similarity groups are represented in a hierarchically constructed similarity diagram, which allows us to study and interpret groups of items based on resemblance of performance characteristics. This analysis aims to answer the following question: *"How students' beliefs about the mathematical errors can describe a probable appropriate (suitable) MWS?"*

Figure 2 shows the similarity relations based on students' consistency in their beliefs towards the use of error in mathematics. This similarity diagram includes twenty-five variables which are related with the errors in mathematics in general and in particular it focuses on three dimensions of the use of error: students' beliefs about the use of error in mathematics a) by the students, b) by the teacher and c) among the students.

In total, two groups of variables were identified in the similarity diagram for this axis of the questionnaire (Figure 2). Following, we analyse each groups of variables separately.

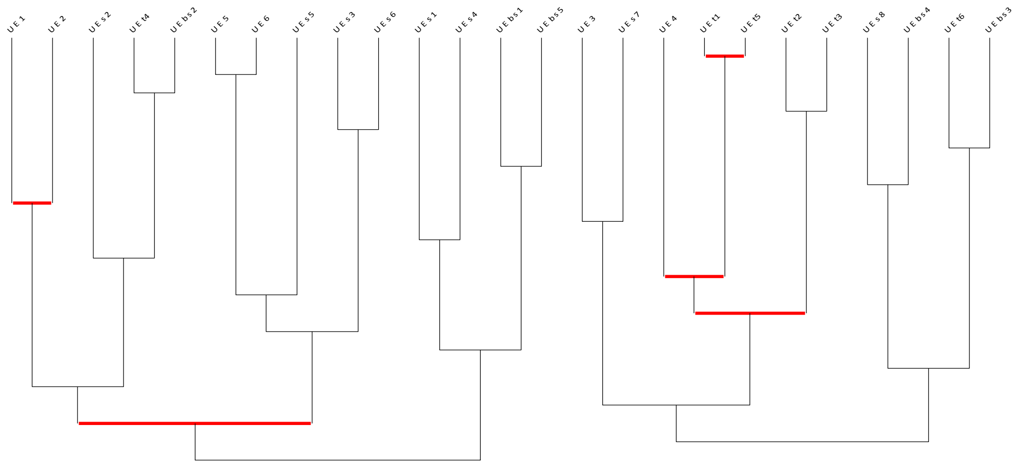

Figure 2. Similarity diagram about students' beliefs towards the use of mathematical errors.

The first group of variables consists of fourteen variables (UE1, UE2, UEs2, UEt4, UEbs2, UE5, UE6, UEs5, UEs3, UEs6, UEs1, UEs4, UEbs1, UEbs5). In this group, most of the variables are grouped due to the fact that they are related with the students' beliefs about the use of errors by themselves and between them, and not by the teacher. At a first glance, we observe the strongest similarity relationship between the variables UE5 and UE6. According to these variables, the errors in mathematics indicate a) that the students have to try harder (UE5) and b) the students' weaknesses in the particular mathematical area (UE6). Both of the statements express the utility of the errors in mathematics. The next strong similarity relationship is observed between the variables UEt4 and UEbs2. The first one supports that "the teacher has to correct students' mistakes on the whiteboard", while the second one argues that "the students feel more confident when they correct their mistakes with their classmates, because they realize that all make mistakes". This pair of variables is linked with the variable UEs2 which expresses the belief that "the teacher has to be with me when I correct my mistakes in mathematics". This similarity relationship between these three variables indicates the students' beliefs about the others' help in the correction of the errors in mathematics. Another strong relation is found between the variables UEs3, UEs6 and UEs5. All these variables refer to the use of errors by the students. In particular, the statement UEs3 describe the belief that "it is helpful the teacher to highlight students that they have errors in mathematics, but to leave them to find it by themselves". In addition, the statement UEs6 supports that "when the students correct their mistakes by themselves, it helps them to identify their weaknesses in mathematics". As a result, the variable UEs5 is connected with the both variables above, because all of them indicate that students prefer to correct their mistakes by themselves (UEs5). Less strong similarity relationship, but significant, is observed between two variables which are related with the errors in mathematics, in general. More specifically, these variables argue that if a student has errors in mathematics a) then he/she deserves a low grade (UE1) and b) means that he/she didn't study sufficiently (UE2). The variables UEbs1 and UEbs5 form another strong similarity relationship. Both variables are related with the effect that their classmates have on them, when they discuss with them their mistakes in mathematics. According to these variables, the students a) are more motivated to participate in the lesson (UEbs1) and b) have better understanding about their errors in mathematics (UEbs5) when they discuss with their classmates. As regard to the rest two variables, they are linked due to the fact that both of them refer to the use of error by themselves. According to these variables "the students have better understanding of a mathematical concept when they correct their mistakes by themselves" (UEs1), so "they prefer to correct their mistakes by themselves rather than by their classmates on the whiteboard" (UEs5).

The second cluster is formed by eleven variables (UE3, UEs7, UE4, UEt1, UEt5, UEt2, UEt3, UEs8, UEbs4, UEt6, UEbs3) which are mostly related with students' beliefs about the use of error by the teacher. The strongest similarity relationship is observed between the variables UEt1 and UEt5. This similarity relationship is significant and it was expected because both variables are related with the teachers' role in the use of error in mathematics. According to these variables, students believe that "it is important their teacher verify that they have understood their mistakes after correcting their work in mathematics" (UEt1) and this means that "the teacher has to use the errors of the students in order to help them to overcome their difficulties in mathematics" (UEt5). This pair of variables presents a less strong, but significant similarity relationship with the belief that "if I have errors in mathematics means that I didn't understand the mathematical concept" (UE4). This relation was expected due to the fact that the belief supported in statement UE4 implies the beliefs in the statements UEt1 and UEt5. All the above variables are linked with the variables UEt2 and UEt3 significantly. According to these variables "the teacher has to use the students' errors in order to design the next lesson in mathematics" (UEt2) because the students support that "they have better understanding of a mathematical concept when their teacher explains them their mistakes in an activity" (UEt3). The explanation about the similarity relationship between the five aforementioned beliefs, is that they give information about the teacher's role towards the use of students' errors in mathematics in order to help the students to overcome their difficulties and understand the particular mathematical content. The above group of the five variables presents a weak similarity relationship with the variables UE3 and UEs7. This pair of variables is connected due to the fact that both of them refer to the way of teaching. In particular, the statement UE3 argues that "the errors indicate that the teacher uses inappropriate ways of teaching", while the statement UEs7 supports that "when I correct my mistakes alone I can't have better understanding of the mathematical concept". Furthermore, another weak similarity relationship is observed between two pairs of variables. The first one consists of the variables UEt6 and UEbs3, while the second one is formed by the variables UEs8 and UEbs4. An explanation exists about the connection between the variables UEt6 and UEbs3. Both variables are related with the affective domain of students. According to the first one (UEt6) "the students don't like their teacher to comment their mistakes in the whole class". Similarly, the statement UEbs3 supports students' beliefs that "they don't like discuss their mistakes in mathematics with their classmates in order to avoid their negative comments". As regards the variables UEs8 and UEbs4, the connection between them wasn't expected, because there isn't any relation between them. However, the variable UEbs4 is related with the aforementioned pair of variables (UEt6, UEbs3) because it gives information about the effect of the errors in the affective domain of students ("I feel uncomfortable when I discuss my mistakes in groups").

As regard the table below (Table 1), the students support that "the teacher has to correct their mistakes on the whiteboard", "…to use their errors in order to help them to overcome their difficulties", "…to verify that they have understood their mistakes after correcting their work in mathematics". In addition, according to the table, students' beliefs about the use of error by the teacher are positive. The aforementioned statements are the three most positive regarding to the teachers' use of error in mathematics.

Table 1
Frequency, mean, and standard deviation of students' answers to the statements about the use of mathematical error

Statements-Variables	No answer	Absolutely disagree	Disagree	Agree	Absolutely agree	Mean	Standard deviation
Use of mathematical error		1	2	3	4		
If I have errors in mathematics, I deserve a low grade. (UE1)	19	121	176	79	33	2.37	1.68
If I have errors in mathematics means that I didn't study sufficiently. (UE2)	18	55	114	164	77	2.91	1.57
Errors indicate that the teacher uses inappropriate teaching ways. (UE3)	18	151	142	70	47	2.32	1.71
If I have errors in mathematics means that I didn't understand the mathematical concept. (UE4)	17	78	156	124	53	2.63	1.59
Errors in mathematics indicate that I have to try harder. (UE5)	38	17	55	170	148	3.67	1.84
Errors in mathematics identify my weaknesses in the particular mathematical content. (UE6)	31	26	79	18 6	10 6	3.38	1.7 7
Use of mathematical error by the student							
Correcting my mistakes alone, I have better understanding about the mathematical concept. (UEs1)	15	80	153	118	62	2.62	1.54
Teacher use to be with me when I correct my mistakes in mathematics. (UEs2)	23	46	155	140	64	2.89	1.69
It is helpful the teacher to highlight me that I have error in mathematics, but to leave me to find it by own/alone. (UEs3)	33	46	92	168	89	3.24	1.89
I prefer to correct my mistakes alone rather than on the whiteboard by my classmates. (UEs4)	16	105	160	84	63	2.51	1.62
I prefer to correct my mistakes alone rather than on the whiteboard by the teacher. (UEs5)	17	126	156	73	56	2.42	1.66
Correcting my mistakes alone, I determine my weaknesses in mathematics. (UEs6)	31	56	116	149	76	3.08	1.89
Correcting my mistakes alone, I can't gain	17	53	135	146	77	2.86	1.55

better understanding about the mathematical concept. (UEs7)							
Correcting my mistakes alone, I can't identify my weaknesses in mathematics. (UEs8)	21	50	125	149	83	2.96	1.65
Use of mathematical error by the teacher							
It is important my teacher verify that I have understood my mistakes after correcting my work in mathematics. (UEt1)	6	22	50	175	175	3.27	1.08
The teacher has to use our errors in order to design the next lesson in mathematics. (UEt2)	18	39	99	162	110	3.10	1.54
I have better understanding of a mathematical concept when my teacher explains me my mistakes in an activity. (UEt3)	15	34	63	176	140	3.23	1.42
The teacher has to correct our mistakes on the whiteboard. (UEt4)	22	39	53	160	154	3.36	1.60
The teacher has to use my errors in order to help me to overcome my difficulties in mathematics. (UEt5)	15	36	58	134	185	3.34	1.43
I prefer my teacher not to comment my mistakes in the whole class. (UEt6)	17	71	135	105	100	2.82	1.62
Use of mathematical error between the students							
I am more motivated to participate during the lesson when I discuss my mistakes with my classmates. (UEbs1)	16	50	125	166	71	2.86	1.50
I feel more confident when I correct my mistakes with my classmates, because I realize that all make mistakes. (UEbs2)	16	47	92	181	92	3.00	1.49
I don't like to discuss my mistakes in mathematics with my classmates in order to avoid their negative comments. (UEbs3)	11	109	151	99	58	2.43	1.45
I feel uncomfortable when I discuss my errors in groups. (UEbs4)	17	93	160	105	53	2.55	1.61
I have better understanding about my errors in mathematics when I discuss them with my classmates. (UEbs5)	13	59	146	156	54	2.69	1.42

5. Conclusions

Despite the fact that the present study doesn't present a concrete didactical situation of one mathematical concept, it is related to the importance of the role of the teacher and the interactions between the students in the creation of an appropriate Mathematical Working Space. It is also related to efficient personal Mathematical Working Spaces in the classroom in relation to the process of FA, as this occurs through the students' beliefs. In fact, in our paper we concentrate on the use of mathematical error by teachers and students. And this is because research in mathematical education has been prolific in the interpretations of students' errors.

As we described above, based on the similarity diagram, we can support that two different groups of students exist. The first one believes that a suitable use of the errors by the teacher is significant for students, in order to have better understanding about a mathematical concept. On the other hand, a large proportion of students do not believe in the proper use of the error from the teacher. This happens because the errors are frequently used by the teacher in order to give a low grade in the test or the exams, etc. This argument emerges from the first cluster of the similarity diagram. This cluster consists mostly of variables which are not related with the use of error by the teacher. Thus, the variables in the same cluster don't engage the interactions between the teacher and the students.

Furthermore, taking into account the mean of each statement, as it is presented in the table, we can conclude to three observations about the student's beliefs for a suitable/appropriate MWS. Firstly, the students argue that the most important for them is the teacher's use of their errors in mathematics through different ways in order to help them overcome their difficulties and gain better understanding about the mathematical content. Some examples of different ways of the use of error by the teacher are the following: correction on the whiteboard, the design of the next lesson, verification of the understanding of the errors, focus on the errors for helping students to overcome their difficulties. In addition, the students have positive beliefs about the use of error between them. More specifically, they strongly believe that they "feel more confident when they correct their mistakes with their classmates, because they realize that all make mistakes". They also believe that they are more motivated to participate in the lesson and they do not feel uncomfortable when they discuss their mistakes with their classmates. As regards the better understanding about their mistakes in mathematics, the students' beliefs are not clear.

The second conclusion is that the students are willing to discuss their errors in mathematics with their classmates. The third observation from the table is related with the students' beliefs about the use of error by themselves. Here, students' beliefs are less positive. According to the strongest belief of the students, "it is helpful the teacher to highlight the students that they have error in mathematics, but to leave them to find it by themselves". They also support that they do not have better understanding about the mathematical concept, when they correct their mistakes by themselves, so they prefer to correct their mistakes on the whiteboard by their classmates or their teacher rather than by themselves. The students' views about the rest of the statements are not clear.

In conclusion, a suitable MWS for the lower secondary school students includes the teacher's use of error firstly, then the interaction between the students and lastly, the use of error by each student separately, in his/her personal Mathematical Work Space. Through the examination of the students' beliefs it is clear that they give less emphasis on the formative use of errors in their personal MWS. In fact, the suitable MWS as defined by the role of the teacher has a more important role in the process of exploiting their errors. Therefore, teaching should be focussed on how to strengthen the formative use of errors by the students either in isolation or in cooperation, in order to enhance their work in their personal MWS. In this way the students will be able to perform in a more autonomous way the different kind of genesis as defined by the MWS model, with the guidance of the teacher as defined in the suitable MWS.

6. Discussion about the MWS

In general, the formative assessment is connected with the semiotic and discursive genesis of the MWS. More specifically, when the teacher or the students give feedback each other, they use a variety of semiotic means in order to communicate their ideas and solve the students' errors in the context of the formative assessment. The gestures, the glances, the speech, and the different types of representations (symbolic, picture, verbal) are some semiotic means that are used during the feedback based on the formative assessment. The speech, that is, the verbal representation is used for the mathematical errors' correction and it is connected both with the discursive genesis and the reference workspace, when the subjects give feedback about the mathematical errors based on the mathematics' theory (rules, properties, and theorem).

The questionnaire that was administered in the present study is related to the genesis of MWS, because through this, we can investigate students' beliefs and conceptions about the teachers' role and the possible interactions between both teacher and students, and also among students. For example, students' beliefs about the teachers' role are investigated using statements such as "After an assessment, my teacher should give each student different tasks, in order to help him/her to identify his/her good skill in mathematics" or "The teacher should correct our mistakes in the whiteboard". Furthermore, the above statements fall into the second and third axis, which measure students' beliefs about feedback given by the teacher to students and the use of error by the teacher respectively. Students' beliefs about the interactions between the teacher and the students are also investigated in the second and third axis of the questionnaire. More specifically, there are statements that investigate students' beliefs about the feedback given by the teacher to students and reverse, while there are statements that look for the students' beliefs about the feedback that students give each other. Both the first kind of feedback and the second one are related with the interaction between the teacher and the students, while the third one is related with the interaction among the students. Similarly, there are three dimensions for the axis of the use of error: the interaction between the teacher and the students, the interaction among the students in the use of error and the students' engagement with their own errors.

In addition, the questionnaire gives information about the students' beliefs in three different levels which can describe the diversity of MWS regarding to assessment (and FA) in the school context: (a) the reference, (b) the appropriate, and (c) the personal MWS (Kuzniak, 2011). Assessment intended by the teacher/curriculum is described in the reference of the MWS, which must be fitted out in an appropriate MWS (that is, appropriate FA techniques and in particular appropriate use of mathematical error), to enable an effective implementation in a classroom where each student works within his/her personal MWS.

In general, students' beliefs about the process of the learning arise by the questionnaire. More specifically, the students express their beliefs and conceptions about the different techniques which take place in their classroom during the process of teaching and learning mathematics. This phenomenon probably falls into the epistemological plane of the MWS model, because when the emphasis is on the processes of students' learning in a didactic situation, this epistemological plan can be considered as an epistemological environment (Coutat & Richard, 2011). On the other hand some researchers insist on the cognitive nature of the beliefs (Goldin, 1999; Mc Leon, 1992).

Gómez-Chacón, Romero Albaladejo, and García López (2016) investigated students' beliefs and how these help or impede students to transit from one kind of genesis to another. Their study was based on the following two traditional categories of attitude: attitudes towards mathematics (when the object of the attitude is mathematics itself) and mathematical attitudes (where the object of the attitude concerns the mathematical processes and activities).

In our case we believe that the coordination of the two planes is necessary in order to able to interpret the relations of students' beliefs and the MWS. In fact, in this article we tried to find traces (indices) related to MWS and to formative assessment in mathematics. Classroom assessment in mathematics education is a complex interactive process between teachers and learners and it has a crucial role in teaching and therefore, it may contribute to the improvement of learning (Veldhuis & van den Heuvel-Panhuizen, 2014). The importance of the use of formative assessment in a mathematics classroom lies in the continuous feedback that can be provided between the teacher and the learners. This feedback comes from the students who give teacher information about their understanding and their misconceptions in order to help the teacher to decide how to modify his/her teaching plan and adapt it according to the students' needs. The formative assessment refers to all students, independently of their learning level. However, it would be interest for a future research, the use of formative assessment to be investigated in students with different learning level in order to propose some guidelines about the more efficient use of the formative assessment in accordance with the students' abilities.

In addition, regarding to the model of MWS, our study presents some limitations. First of all, the model of MWS does not include particular considerations in the affective domain in mathematical education. However, the present study does not refine (or complement) the model with such considerations. As a result, there is no fine articulation between some affective variables and the components of the model in this study. We believe that more studies must be done concerning this issue in order to enrich the model of MWS with an affective dimension.

References

Barrera, R. (2013). On the meanings of multiplication for different sets of numbers in context of geometrization: Descartes' multiplication, mathematical workspace and semiotic mediation. *Mathematics Teaching-Research Journal Online, 6*(1–2), 1–20.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7–74.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309–336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970–1990.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clark, I., (2011). Formative assessment and motivation: Theories and themes. *Prime Research on Education (PRE), 1*(2), 27–36.

Cooney, T. J. (1999). Examining what we believe about beliefs. In E. Pehkonen & G. Torner (Eds.), *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics: Proceedings of the workshop in Oberwolfach* (pp. 18–23). Duisburg: Gerhard Mercator University.

Coutat, S., & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 97–126.

Crooks, T. (2001). *The validity of formative assessments*. Paper presented at the British Educational Research Association Annual Conference, University of Leeds, 13–15 September 2001.

De Corte, E., Op't Eynde, P., & Verschaffel, L. (2002). Knowing what to believe:

The relevance of students' mathematical beliefs for mathematics education. In B. K. Hofer & P. R. Pintrich (Eds.), *Personal epistemology. The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp. 297–320). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Desforges, C. (1989). *Testing and assessment.* London: Cassell.

Eurydice. (2012). *The European higher education area in 2012: Bologna process implementation report*. Bruxelles: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Formative assessment. (n.d.). In *Wikipedia*. Retrieved January 19, 2017 from https://en.wikipedia.org/wiki/Formative_assessment.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation, 6*(1), 24–58.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Panaoura, A., & Michael-Chrysanthou, P. (2016). Fostering representational flexibility in the mathematical working space of rational numbers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 287–307.

Goldin, G. A. (1999). Affect, meta-affect and mathematical belief structures. In E. Pehkonen & G. Torner (Eds.), *Mathematical beliefs and their impact on the teaching and learning of mathematics: Proceedings of the workshop in Oberwolfach* (pp. 37–42). Duisburg: Gerhard Mercator University.

Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M., & García López, M. M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: A mathematical working space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 909–924.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical implicative analysis.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Guin, D., & Trouche, L. (1998). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*(3), 195–227.

Heritage, M. (2013). *Formative assessment in practice: A process of inquiry and action.* Cambridge, MA: Harvard Education Press.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 175–193.

Huhta, A. (2010). Diagnostic and formative assessment. In B. Spolsky & F. M. Hult (Eds.), *The Handbook of Educational Linguistics* (pp. 469–482). Oxford, UK: Blackwell.

Kardash, C. M., & Howell, K. L. (2000). Effects of epistemological beliefs and topic-specific beliefs on undergraduates' cognitive and strategic processing of dual-positional text. *Journal of Educational Psychology, 92*(3)*,* 524–535.

Kelly, G. A. (1991). *The psychology of personal constructs* (Vol. 1). London: Routledge.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics and Technology Education, 6*(2), 167–187.

Kuzniak, A. (2011). The mathematical work space and its genesis. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9–24.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *RELIME, 17*(4–I), 17–27.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721–737.

Kyriakides, L. (1999). Research on baseline assessment in mathematics at school entry. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice, 6*(3), 357–375.

Lakoff, G., & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by.* Chicago, IL: Chicago University Press.

Lerman, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données.* Paris: Dunod.

Mariotti, M. A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 695–724). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Marton, F. (1981) Phenomenography – Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*(2)*,* 177–200.

Mason, L. (2000). Role of anomalous data and epistemological beliefs in middle students' theory change on two controversial topics. *European Journal of Psychology of Education, 15*(3)*,* 329–346.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York: Macmillan.

Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., & Vannini, I. (2014). Formative assessment in mathematics: A theoretical model. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 14*, 43–70.

Mora, D. V., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., & Ribeiro, M. (2016). Mathematics teacher's specialised knowledge and the mathematical working spaces of a linear algebra's teacher. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 222–239.

OECD. (2005). OECD annual report 2005: 45th anniversary. Paris: OECD Publishing. Retrieved from https://www.oecd.org/about/34711139.pdf

OECD. (2012). Education at a glance 2012: OECD indicators. Paris: OECD Publishing. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1787/eag-2012-en

Panero, M., Arzarello, F., & Sabena, C. (2016). The mathematical work with the derivative of a function: Teachers' practices with the idea of "generic". *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 265–286.

Popham, W. J. (2008). *Transformative assessment.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Pratt, D. D. (1992). Conceptions of teaching. *Adult Education Quarterly, 42*(4), 203–220.

Presmeg, N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Mathematics Education Library. Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (p. 293–312). Dordrecht: Kluwer Academic.

Ramsden, P. (1997). The context of learning in academic departments. In F. Marton, D. J. Hounsell, & N. J. Entwistle (Eds.), *The experience of learning: Implications for teaching and studying in higher education* (pp. 198–216). Edinburgh: Scottish Academic Press.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the mathematical working space framework. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 1–16.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Beliefs system, social cognition, and metacognition as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*(4)*,* 329–363.

Schraw, G., Dunkle, M. E., & Bendixen, L. D. (1995). Cognitive processes in well-defined and ill-defined problem solving. *Applied Cognitive Psychology, 9*(6)*,* 523–538.

Shepard, L. A. (2005). Formative assessment: Caveat emptor. ETS Invitational Conference 2005. *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning.* New York, October 10–11, 2005.

Struyven, K., Dochy, F., & Janssens, S. (2005). Students' perceptions about evaluation and assessment in higher education: A review. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *30*(4), 325–341.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research: In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Van De Walle, J. A., Karp, S. K., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8th ed.). Boston: Pearson.

Veldhuis, M., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Primary School Teachers' Assessment Profiles in Mathematics Education. PLoS ONE 9(1): e86817. doi:10.1371/journal.pone.0086817

Weeden, P., Winter, J., & Broadfoot, P. (2002). *Assessment: What's in it for schools?* London: Routledge Falmer.

White, R. T. (1994). Commentary: Conceptual and conceptional change. *Learning and Instruction, 4*(1)*,* 117–121.

Wragg, E. C. (2001). *Assessment and learning in the primary school.* London: RoutledgeFalmer.

La gestión en el proceso enseñanza-aprendizaje y su vínculo con la competencia "mirar profesionalmente"

Luis Ángel Bohórquez Arenas
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotá, Colombia
MESCUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Bogotá
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Bologna

Abstract. *In this article we summarizes the work developed in the doctoral thesis "Change of conceptions of students for teachers about their management of the teaching-learning process in learning environments based on problem solving" around the concept of competence. For this reason a comprehensive review is presented from its etymology to the characterizations currently being made on this concept, particularly in mathematics education. In the first instance, the definition given initially by Chomsky (1957, 1965) and the evolution of it in works proposed by other researchers are presented. Second, there is a current consideration of competition that takes into account much of the evolution of concept presented. Finally we talk about the teaching competence and its close relationship with the management of the teaching-learning process and the changes that students have for teaching about it.*

Keywords: competence, professional noticing, changes of believe, teacher training

Sunto. *In questo articolo si riassume il lavoro sviluppato nella tesi dottorale "Cambio di concezioni di studenti in formazione come docente circa la propria gestione del processo di insegnamento-apprendimento in ambienti di apprendimento basati sulla risoluzione di problemi" relativamente al concetto di competenza. A questo scopo si presenta una revisione completa a partire dalla sua etimologia fino a giungere alle caratterizzazioni che attualmente si presentano relativamente a questo concetto, in particolare nell'ambito della didattica della matematica. In prima istanza si presentano la definizione data inizialmente da Chomsky (1957, 1965) e l'evoluzione della stessa in lavori proposti da altri ricercatori. In secondo luogo, si presenta una considerazione attuale sulla competenza che prende in considerazione la vasta evoluzione di questo concetto. Per finire si parla della competenza docente e della sua stretta relazione con la gestione del processo di insegnamento-apprendimento e i cambi che gli studenti in formazione come futuri docenti hanno sulla stessa.*

Parole chiave: competenza, competenza docente "guardare con professionalità", cambi di concezione, formazione di docenti

Resumen. *En este artículo se resume el trabajo desarrollado en la tesis doctoral "Cambio de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas" alrededor del concepto de competencia. Por tal razón se* *presenta una revisión exhaustiva desde su etimología hasta caracterizaciones que actualmente se hacen sobre este concepto, en particular en la educación matemática. En primera instancia se presentan la definición dada inicialmente por Chomsky (1957, 1965) y la evolución de la misma en trabajos propuestos por otros investigadores. En segundo lugar, se presenta una consideración actual sobre la competencia que tiene en cuenta mucha de la evolución de concepto presentada. Finalmente se habla de la competencia docente y su estrecha relación con la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y los cambios que los estudiantes para profesor tienen sobre la misma.*

Palabras clave: competencia, competencia docente "mirar profesionalmente", cambios de concepciones, formación de profesores

1. El significado de la palabra competencia

1.1. Etimología

El concepto de competencia posee un doble significado, según el diccionario de la Real Academia Española (2001); el primer significado proviene del latín "competentĭa" asociada con el verbo "competĕre", que significa competir. Desde este significado, es posible encontrar las siguientes acepciones: disputa o contienda entre dos o más personas sobre algo; competencia como oposición o rivalidad entre dos o más que aspiran a obtener la misma cosa; la tercera acepción hace referencia a la situación de empresas que rivalizan en un mercado ofreciendo o demandando un mismo producto o servicio y por último competencia en ámbito deportivo.

El segundo significado ha dado origen a la palabra "competente", en el cual se establecen dos acepciones: competencia como incumbencia, como pericia, aptitud, idoneidad para hacer o intervenir en un asunto determinado y como atribución legítima de un juez u otra autoridad para el conocimiento o resolución de un asunto. Se tienen entonces dos verbos, "competir" y "competer", que provienen del mismo verbo latino "competĕre", pero que se diferencian sustantivamente. Sin embargo, estos dos verbos dan origen al sustantivo "competencia" lo que dificulta enormemente su comprensión, pudiendo dar lugar a posibles significados polisemánticos.

1.2. La competencia orígenes del significado

Gómez (2007), Rico y Lupiáñez (2008) y Lupiáñez (2010) manifiestan que comúnmente se ha aceptado que uno de los primeros significados concretos asignados al término competencia se atribuye a los trabajos en lingüística de Chomsky (1957, 1965, 1980). Según estos autores, desde la perspectiva lingüística de Chomsky se define la competencia como el dominio de los principios que gobiernan el lenguaje; y la actuación como la manifestación de las reglas que subyacen al uso del lenguaje. Según Puig (2008), la competencia lingüística se presenta en oposición a las actuaciones (“performances”, en inglés) concretas en que esa competencia se actualiza, y esta opinión la sustenta en el hecho de que Chomsky afirma con contundencia que la “teoría lingüística se interesa principalmente por un hablante-oyente ideal … que conoce su lengua perfectamente … y que no se ve afectado por condiciones gramaticalmente irrelevantes… al aplicar su conocimiento de esta lengua en actuaciones concretas” (p. 3).

Hymes (1971) propone trascender las definiciones de competencia y actuación establecidas por Chomsky (1957, 1965), pues considera que éstas se sostienen en una idea de actuación privada de significación socio-cultural. Hymes (1971) establece la competencia como capacidades de una persona, pero que no dependen exclusivamente del conocimiento, sino también de la habilidad para el uso. Como partes de la competencia este autor define el conocimiento, la habilidad para el uso y los modelos de actuación.

Según Bustamante (2003), las definiciones de Hymes (1971) tienen puntos comunes con la definición de Chomsky (1957, 1965, 1980), pues la competencia es un hecho personal, la posibilidad sistemática le pertenece a la estructura, el sistema sobrepasa al individuo, la habilidad para el uso incorpora elementos cognoscitivos. A pesar de las similitudes, Bustamante (2003) destaca aspectos que hacen que las definiciones de Hymes (1971) difieran de las expuestas por Chomsky (1957, 1965, 1980), a saber: la posibilidad sistemática también tiene que ver con la estructura de otros sistemas de signos; el conocimiento varía de un individuo a otro, la habilidad para el uso incorpora aspectos no cognoscitivos, la actuación no es realización imperfecta de la competencia, las competencias de los individuos se sobredeterminan y el contexto es una clave de interpretación.

Las diferencias y similitudes presentadas entre las definiciones de Chomsky (1957, 1965, 1980) y Hymes (1971) son un ejemplo de lo expuesto por Weinert (2001), pues para este autor existen muchos enfoques teóricos diferentes y los significados varían según el punto de vista y los objetivos subyacentes asociados al uso del término competencia, tanto en el debate científico como en el discurso político.

En esta revisión se mostrarán múltiples significados que se atribuyen al concepto de competencia.

Braslavsky (1993) considera que una competencia es un saber hacer con saber y con consciencia respecto del impacto de ese hacer. Para Coolahan (1996), la competencia es la capacidad general basada en los conocimientos, experiencias, valores y disposiciones que una persona ha desarrollado mediante su compromiso con las prácticas educativas. Por su parte, Perrenoud (1997) también habla de la competencia en términos de capacidad, pero entendida como la capacidad de actuar eficazmente en un número determinado de situaciones, capacidad basada en los conocimientos, pero que no se limita a ellos. A principios del siglo XXI, Roegiers (2000) considera la competencia como la posibilidad de movilizar un conjunto integrado de recursos con el fin de resolver una situación problema que pertenece a una familia de situaciones. Prieto (1997) retoma la idea de competencia en términos de capacidad y considera que las competencias tienden a transmitir el significado de lo que la persona es capaz de ejecutar, el grado de preparación, suficiencia o responsabilidad para ciertas tareas.

Beckers (2002) señala que la competencia moviliza diversos recursos al servicio de una acción con finalidad precisa. Según esta autora, la competencia es la capacidad que permite al sujeto movilizar, de manera integrada, sus recursos internos (saberes, saber hacer y actitudes) y externos, a fin de resolver eficazmente una familia de tareas complejas para él. También en el 2002 la red educativa de la Comisión Europea (Eurydice, 2002) considera la competencia como la capacidad o potencia para actuar de manera eficaz en un contexto determinado.

2. Hacia una nueva caracterización de la competencia

En vista de los problemas conceptuales y los debates sobre las definiciones, Rychen y Tiana (2004) proponen un enfoque funcional de las competencias, como el adoptado para la iniciativa de Definición y Selección de Competencias: bases teóricas y conceptuales (DeSeCo) y llevada a cabo conjuntamente por la Oficina Federal Suiza de Estadísticas y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE-Suiza). Esta conceptualización es holística, en el sentido de que integra y relaciona demandas externas, atributos individuales (incluida la ética y los valores) y el contexto como elementos esenciales del desempeño competente.

2.1. La competencia asociada a las habilidades prácticas y cognoscitivas

En el contexto descrito anteriormente, una competencia se define como "la habilidad para satisfacer exigencias complejas de manera satisfactoria o para llevar a cabo una tarea o una actividad" (p. 21). Desde esta perspectiva, Rychen y Tiana (2004) definen la competencia como: "una combinación de habilidades prácticas y cognoscitivas interrelacionadas, conocimientos, motivaciones, valores y ética, actitudes, emociones y otros componentes sociales y comportamentales que pueden movilizarse conjuntamente para una acción eficaz en un contexto particular" (p. 22).

De acuerdo con lo anterior es posible dar mayor sentido a lo dicho por Weinert (2004) quien afirma que si restringía nuestro enfoque al uso del término competencia en filosofía, psicología, lingüística, sociología, ciencia política y economía, se seguía teniendo una amplia variedad de definiciones. No obstante, afirma este autor, que en todas estas disciplinas se interpreta la competencia como un sistema bastante especializado de habilidades y capacidades necesarias o suficientes para alcanzar una meta específica.

En Rico y Lupiáñez (2008) se encuentran recogidos y analizados diferentes acercamientos a la noción de competencia, en donde se establecen tres ideas centrales (invariantes) que, de manera más o menos explícita, intervienen en todas caracterizaciones sobre competencia:

> - componentes cognitivos o de otros tipos que entran en la caracterización que cada autor hace de la competencia,
> - finalidad o finalidades que se le asignan, y
> - contexto en que se sitúa o desempeña la competencia.
>
> (Rico & Lupiáñez, 2008, p. 138)

Con relación al significado de competencia en educación, Rico y Lupiáñez (2008) extraen tres ideas importantes, a saber:

- la competencia sirve para y se manifiesta mediante la acción, lo cual se expresa de diversos modos, genéricos o específicos, como actuar, interpretar y resolver problemas, enfrentar demandas complejas o aplicar conocimientos a la práctica;
- la competencia se muestra mediante el desarrollo personal y social del sujeto competente, lo cual también se expresa de diversas maneras como vivir, desarrollar capacidades, tomar decisiones, continuar aprendiendo, trabajar, o mejorar la calidad de vida;
- la competencia siempre hace referencia a un contexto de aplicación; hay un claro énfasis en que la acción y el desarrollo, que se derivan de las componentes cognitivas y actitudinales, tienen lugar en un marco concreto, de manera contextualizada; las menciones son amplias y, a veces, imprecisas, pero no dejan lugar a dudas.

En el análisis anterior se mencionan situaciones determinadas o definidas, y las referencias a contextos tienen mayor diversidad y transmiten más precisión: contextos académicos, profesionales o sociales en una variedad de áreas, en la práctica educativa o en la sociedad. Rodríguez (2007) presenta una concepción de competencia en la que se aprecian los tres componentes de los que hablan Rico y Lupiáñez (2008), pues este autor considera que la competencia es una noción que integra:

> el saber –conocimiento teórico o proposicional (...) derivado de las afirmaciones empíricas o lógicas sobre el mundo–, saber hacer –conocimiento práctico o desarrollo de las habilidades y destrezas necesarias para obrar en el mundo– y saber ser –conocimiento experiencial, también denominado saber del "saber estar", del conjunto de normas, valores, actitudes y circunstancias que permiten interactuar con éxito en el medio social. (Rico & Lupiáñez, 2008, p. 146)

Los aspectos de las competencias referidas al saber que menciona Rodríguez (2007) se pueden identificar, en gran medida, en la caracterización que hace Carlos E. Vasco de este término:

> la competencia puede describirse más precisamente como un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, metacognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad o de cierto tipo de tareas en contextos relativamente nuevos y retadores. (C. E. Vasco, comunicación personal, 2 de marzo de 2011)

La caracterización hecha por Vasco está relacionada, en alguna medida, con la caracterización de competencia presentada por D'Amore, Godino y Fandiño Pinilla (2008) quienes establecen que la competencia es un concepto complejo y dinámico.

Complejo: porque se trata del conjunto de dos componentes: uso (exógeno) y dominio (endógeno). Incluso de elaboración cognitiva, interpretativa y creativa, de conocimientos que relacionan contenidos diferentes.

Dinámico: el uso y el dominio no son las únicas expresiones de la competencia. La competencia como objeto engloba en sí misma no sólo conocimientos que se requieren, sino también factores meta-cognitivos. Por ejemplo, la aceptación del estímulo para usarlos, el deseo de hacerlo, el deseo de completar los conocimientos que se revelan a la prueba de los hechos, insuficientes y por lo tanto el deseo mismo de aumentar la propia competencia.

2.2. La nueva caracterización de competencia

Tomando como base lo expuesto por Rodríguez (2007) y D'Amore, Godino y Fandiño Pinilla (2008), en este artículo, se entenderá la competencia como un conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes donde se vinculan tres tipos de saberes: 1- un saber asociado a conocimientos teóricos o proposicionales que relacionan contenidos diferentes, 2- un saber relacionado con un conocimiento práctico que permita el desarrollo de las habilidades y destrezas necesarias para ejecutar diferentes acciones y finalmente 3- un saber asociado a un conocimiento del conjunto de normas, valores, afectos, actitudes y circunstancias que permitan interactuar con éxito en el medio social. El vínculo entre estos saberes debe permitir que se identifiquen debilidades en relación a los conocimientos involucrados y el deseo de aumentar la competencia.

3. La competencia docente "mirar profesionalmente" y su relación con la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje

Teniendo en cuenta la caracterización anterior sobre la competencia y la revisión que sobre gestión se realizó en la tesis doctoral de Bohórquez (2016), la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje se entenderá como una competencia del profesor de matemáticas que involucra múltiples actividades que, en su mayoría, surgen en el contexto del aula y que tienen como fin primordial promover el aprendizaje y la instrucción de los estudiantes. Estas actividades, al igual que en Llinares (2000), serán dividas en dos grandes grupos: 1- las actividades de carácter general y 2- las actividades consideradas específicas del contenido matemático.

Las actividades de carácter general se asumirán desde las perspectivas de Doyle (1986), McCaslin y Good (1992) y Brophy (1999, 2006). Esto es, todas aquellas actividades relacionadas con la organización de los estudiantes, materiales, tiempo y espacio. Aquellas actividades que permitan involucrar a los estudiantes u obtener su cooperación, que establezcan y mantengan procedimientos de la clase, que permitan el seguimiento de los comportamientos de los alumnos y todas aquellas que el profesor identifique necesarias para que sus estudiantes participen de manera óptima en el ambiente de aprendizaje previsto.

Las actividades consideradas específicas del contenido matemático son aquellas que están relacionadas con la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático que subyace al problema matemático propuesto (Llinares, 2000; Perrin-Glorian, 1999; Saraiva, 1995). Por ejemplo, para Hersant y Perrin-Glorian (2005) una de estas actividades es identificar el conocimiento objetivo (que no siempre es explícito y no siempre coincide con el expresado por el profesor) y la forma en que este conocimiento aparece en el problema a resolver. Otra actividad del maestro es identificar los datos que puedan ser utilizados por los estudiantes sin ninguna intervención de él en la resolución del problema.

Usualmente la actividades de contenido matemático exigen a los profesores, entre otras cosas, capacidades para observar e interpretar de manera emergente el pensamiento de los estudiantes, teniendo en cuenta las formas en que los alumnos utilizan el lenguaje. Este tipo de actividades requiere, por parte del profesor, una interacción entre la comprensión matemática específica y su conocimiento sobre los estudiantes y el razonamiento matemático de éstos. Esto es, el profesor requiere prever sus actuaciones acorde con las formar de trabajar de sus estudiantes en clase, lo cual le permite al profesor interactuar con sus estudiantes teniendo en cuenta sus conocimientos y sus compresiones con relación al concepto a desarrollar. Al respecto, Ball y Forzani (2009) establecen que el profesor tiene que decidir, en el transcurso de la clase, ¿qué tono de voz a emplear?, ¿por dónde caminar alrededor en el aula?, ¿a quién va a llamar cuando lo requiera? y ¿qué frases utilizar para formular su pregunta?.

Las preguntas y las frases utilizadas por el profesor en las clases deben, según Ball y Forzani (2009), comprobar la comprensión de los estudiantes. Ball (2000) considera muy útil que el profesor estableciera qué podría hacer que un problema fuese complejo para sus estudiantes y cómo ellos podrían atascarse. De esta manera, el profesor podría prever qué hacer en caso de que esto ocurriera y así lograr enganchar nuevamente a los estudiantes con el problema o qué podrían encontrar interesante en el desarrollo del mismo. Este tipo de trabajo puede hacer que el profesor pueda aceptar, durante el desarrollo de la clase, nuevos caminos de solución que el estudiante proponga así él no lo haya contemplado con anterioridad.

Prever o anticipar las estrategias de un estudiante, incluso tener en cuenta las estrategias usuales de los estudiantes para orientarlos, es un componente importante de la competencia "mirar profesionalmente" propuesta por Jacobs, Lamb y Philipp (2010). La competencia docente "mirar profesionalmente" es aquella que permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas integrando tres destrezas. La primera consiste en identificar los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; la segunda poner en juego su conocimiento para razonar sobre los aspectos relevantes identificados y la tercera, el profesor debe realizar conexiones entre aspectos específicos de las situaciones de enseñanza-aprendizaje y principios e ideas más generales sobre la misma para tomar decisiones de acción (Jacobs et al., 2010).

La competencia docente "mirar profesionalmente", según Llinares (2013a), como una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas, permite al profesor de matemáticas interpretar las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera que lo diferencia de la forma en que lo hace alguien que no es profesor de matemáticas. Mason (2002) indica que un aspecto fundamental de esta competencia docente es que el profesor de matemáticas sea consciente de cómo interpreta las situaciones de enseñanza-aprendizaje mirando de una manera estructurada lo que puede ser relevante para mejorar la comprensión de sus estudiantes. Una característica de esta perspectiva interpretativa es la relación con el conocimiento de matemáticas del profesor, es decir, la interdependencia de la comprensión matemática del profesor con la competencia "mirar profesionalmente" (Fernández, Llinares, & Valls, 2013). Desde esta perspectiva, el análisis de la enseñanza de las matemáticas está relacionado con el aprendizaje del estudiante para profesor y el aprendizaje a lo largo de su vida (Llinares, 2015).

Sobre la formación de los estudiantes para profesor y los profesores en ejercicio, Jacobs et al. (2010) establecieron indicadores de crecimiento que pueden ayudar a los formadores de profesores de matemáticas a identificar y celebrar los cambios con relación a la competencia "mirar profesionalmente". En concreto, estos autores llaman la atención sobre los siguientes cambios:

- cambio de estrategia general para las descripciones de las clases que incluyen los detalles importantes matemáticamente;
- cambio de los comentarios generales sobre la enseñanza y el aprendizaje que abordan específicamente la comprensión de los estudiantes;
- cambio sobre su manera de generalizar la comprensión de sus estudiantes teniendo en cuenta interpretaciones y detalles específicos de la situación;

- cambio cuando el docente deja de considerar a los estudiantes sólo en grupo para considerarlos individualmente, tanto en términos de sus acuerdos como en los problemas sobre su comprensión;
- cambio de la manera de razonar del docente acerca de los próximos pasos a seguir; esto es, cambios en su razonamiento con relación a la consideración sobre la comprensión de los estudiantes y la previsión de las futuras estrategias que pueden proponer los mismos y
- cambio, en tanto el docente no sólo da sugerencias para próximos problemas de carácter general (por ejemplo, problemas de práctica) sino que también hace sugerencias con relación a problemas específicos (por ejemplo, la construcción del concepto de número).

Para Jacobs et al. (2010) se debe tener en cuenta que algunos de estos cambios pueden ser mínimos en un primer momento. Razón por la cual, para estos investigadores, los formadores de profesores tienen que ser pacientes y esperar inicialmente una limitada, en lugar de una robusta significativa, evidencia de los cambios. De hecho, estos autores concluyen que esta competencia es compleja y que puede requerir años desarrollarla.

Amador (2016) establece que al iniciar los cursos de formación de profesores es muy probable que estos educadores en formación carezcan de la competencia "mirar profesionalmente". Sin embargo, en los resultados, esta autora establece que los futuros profesores pueden desarrollar alguna capacidad para "mirar profesionalmente" en tan sólo un semestre de trabajo en cursos de formación. Este hecho se evidenció en los resultados de la tesis doctoral de Bohórquez (2016) quien evidenció, tanto en las declaraciones de los estudiantes para profesor como en sus actuaciones, aspectos que podían vincularse con la competencia "mirar profesionalmente". Un ejemplo de este hecho se observa en el instrumento de análisis viñeta 2.

En la investigación de Bohórquez (2016) la viñeta se entendió desde la perspectiva de Gavilán, García y Llinares (2007) y Gavilán (2010). Esto es, la viñeta es considerada un informe que señala el momento cronológico en el que sucede la acción. Se compone, esencialmente, de los datos utilizados (generalmente de diferentes fuentes) y de la inferencia realizada por los investigadores sobre la modelación del mecanismo identificado en la práctica y apoyado en la revisión de la literatura sobre investigaciones. En síntesis, según estos autores, una viñeta da cuenta en la investigación de los datos y de su análisis de manera conjunta, "es una forma de contar el análisis a partir de los datos empíricos" (Gavilán et al., 2007b, p. 13). La viñeta 2 en la investigación de Bohórquez (2016) se denominó *concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas de estudiantes par profesor al finalizar el trabajo en el espacio de formación*.

Los datos para construir esta viñeta 2 proceden de las respuestas a un instrumento de recolección de información, basado en el diseño de D'Amore y

Fandiño Pinilla (2004), llamado *carta de invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula* (CDCGA) aplicado en la última sesión presencial de un curso de formación de docente que se fundamenta en la resolución de problemas a 28 estudiantes y a las entrevistas semi-estructuradas realizadas a estos estudiantes para profesor luego de revisar sus respuesta a dicho instrumento.

En esta viñeta se evidenció que veinte (20) estudiantes de los 28 conciben su gestión como profesores como aquella en la que el docente tiene a cargo múltiples actividades, algunas de las cuales se pueden vincular con la competencia "mirar profesionalmente". Tal es el caso del estudiante E4, quien en relación a los cambios en sus concepciones escribe lo siguiente:

> E4: Es muy notable que se ha dado un cambio a raíz del curso…se han puesto en acción diversas cosas, haciendo un ambiente de clase y de resolución de problemas más efectivo y llamativo. Tanto así que copiaría: el trabajo en grupo, la guía que le da el maestro a los estudiantes, las preguntas generales, individuales precisas que hacen que los estudiantes generen habilidades de pensamiento y puedan establecer soluciones.

En su respuesta, E4 considera que las acciones del profesor del curso que debe imitar son aquellas en donde el profesor organiza a sus estudiantes por grupos y guía a los estudiantes estableciendo preguntas generales e individuales. Con relación a las preguntas, se aprecia que para este estudiante es de vital importancia el tipo de preguntas que el profesor debe hacer y lo que debe lograr con las mismas.

Cuando E4 hace referencia a los aspectos de la gestión asociadas con la organización de los estudiantes, esto se puede relacionar con las concepciones de carácter general mencionadas por Doyle (1985) y Llinares (1999). Sin embargo, cuando hace referencia explícita sobre la importancia de que el docente formule preguntas para orientar a los estudiantes, se aprecia una relación directa con las concepciones que mencionan Llinares (1999) y Hersant y Perrin-Glorian (2005). Esto es, hace alusión a las actividades asociadas a la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático. E4, en su respuesta a la entrevista, da claras muestras de comprender que las preguntas que generan aprendizaje son importantes en la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor:

> I: En tu respuesta a la carta dices que has evidenciado cambio en la concepción sobre tu gestión como profesor en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas y que ese cambio se debe a diversas cosas que se han puesto en acción en el curso, ¿a qué cosas te refieres?
> E4: Bueno, es que yo había trabajado en otras asignaturas, antes a esta, por resolución de problemas y la verdad me parecía un trabajo muy aburridor. Era un trabajo solitario, no por no tener compañeros sino por la poca ayuda del profesor. En cambio en este curso el rol del profesor es muy importante, pues él plantea el problema, pero uno termina creyendo que es de uno. Además, el profesor en clase

> habla con los grupos y allí él pregunta teniendo en cuenta lo que uno ha hecho y uno también le pregunta, sólo que las preguntas que el profesor hace son duras y cuando se discuten las respuestas con los demás, se da uno cuenta que está resolviendo sus propias dudas. Eso es lo que yo quiero hacer cuando sea quien oriente.

Es posible identificar en la respuesta de E4 tres acciones fundamentales, referentes a la forma como el profesor interactúa con los estudiantes. La primera tiene que ver con la capacidad del profesor para identificar las estrategias usadas por los estudiantes, en particular cuando E4 dice: "…él pregunta teniendo en cuenta lo que uno ha hecho".

La segunda acción está asociada a la capacidad del profesor para interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes. Esto se evidencia cuando E4 dice: "él pregunta teniendo en cuenta lo que uno ha hecho y uno también le pregunta, sólo que las preguntas que el profesor hace son duras y cuando se discuten las respuestas con los demás, se da uno cuenta que está resolviendo sus propias dudas".

Finalmente, la tercera se evidencia en la descripción que hace E4 sobre la decisión del profesor de hacer preguntas a sus estudiantes que les permitieran avanzar en la comprensión del problema y los conceptos matemáticos involucrados. Esto es, E4 describe cómo el profesor decidió responder (decisiones de acción) teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes. Esta destreza es la tercera acción fundamental que E4 desea implementar cuando sea profesor.

Estas tres acciones que identifica E4 son precisamente, como se indicó anteriormente, las actividades consideradas por Jacobs et al. (2010) fundamentales de la competencia "mirar profesionalmente". Al respecto, en Bohórquez (2016) se aclara que, aunque en sus estudiantes se evidenciaron aspectos que podían vincularse con la competencia "mirar profesionalmente", no es correcto suponer que dicha competencia se desarrolló en estos estudiantes, pues como lo establecen Jacobs et al. (2010), Llinares (2013b, 2015), entre otros, desarrollar esta competencia requiere de tiempo y de actividades diseñadas explícitamente para ello. Sin embargo, un aporte de la investigación de Bohórquez (2016) es que los componente fundamentales de la competencia "mirar profesionalmente" se pueden desarrollar en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Amador, J. (2016). Professional noticing practices of novice mathematics teacher educators. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(1), 217–241.

Ball, D. (2000). Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach, *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241–247.

Ball, D., & Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, *60*(5), 497–511.

Beckers, J. (2002). *Développer et évaluer les compétences à l'école*. Bruxelles: Labor.

Bohórquez, L. Á. (2016). *Cambio de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Braslavsky, C. (1993). *Autonomía y anomia en la educación pública argentina*. Buenos Aires: FLACSO.

Brophy, J. (1999). Perspectives of classroom management: Yesterday, today, and tomorrow. En H. J. Freiberg (Ed.), *Beyond behaviorism: Changing the classroom management paradigm* (pp. 43–56). Boston: Allyn & Bacon.

Brophy, J. (2006). History of research on classroom management. En C. M. Evertson & C. S. Weinstein (Eds.), *Handbook of Classroom Management: Research, Practice, and Contemporary Issues* (pp. 17–43). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bustamante, G. (2003). *El concepto de competencia III. Una mirada interdisciplinar*. Bogotá, D.C.: Sociedad Colombiana de Pedagogía.

Chomsky, N. (1957). *Syntactic structures*. The Hague, The Netherlands: Mouton Publishers.

Chomsky, N. (1965). *Aspects of the theory of syntax*. Cambridge: M.I.T. Press.

Chomsky, N. (1980). *Rules and representations*. New York, NY: Columbia University Press.

Coolahan, J. (1996). Compétences et connaissances. En W. Hutmacher (Ed.), *Symposium sur "Compétences clés pour l'Europe", Berne, Suisse, 27–30 mars 1996: Rapport général* (pp. 1–27). Strasbourg: Conseil de l'Europe, Conseil de la coopération culturelle (CDCC), Un enseignement secondaire pour l'Europe.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática en la escuela secundaria superior. *Epsilon*, *58*(20), 25–43.

D'Amore, B., Godino, J. D., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotá, D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.

Doyle, W. (1985). Recent research on classroom management: Implications for teacher education. *Journal of Teacher Education*, *36*(3), 31–35.

Eurydice. (2002). *Las competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria.* Recuperado de http://www.eurydice.org

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1–2), 441–468.

Gavilán, J. M. (2010). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Sevilla: Edición Digital @tres S.L.L.

Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemática. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157–170.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/444/

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1), 113–151.

Hymes, D. (1971). Competence and performance in linguistic theory. En R. Huxley & E. Ingram (Eds.), *Acquisition of languages: Models and methods* (pp. 3–28). New York: Academic Press.

Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202.

Llinares, S. (1999). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Da Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia* (pp. 109–132). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, *6*(1), 41–62.

Llinares, S. (2013a). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, 50, 117–133.

Llinares, S. (2013b). Innovación en la educación matemática: más allá de la tecnología. *Modelling in Science Education and Learning, 6*(1), 7–19.

Llinares, S. (2015). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas". Algunas características en la formación inicial de profesores de matemáticas. En B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 271–285). Chía: Universidad de La Sabana.

Lupiáñez, J. L. (2010). *Competencias del profesor de educación primaria*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/800/

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: RoutledgeFalmer.

McCaslin, M., & Good, T. (1992). Compliant cognition: The misalliance of management and instructional goals in current school reform. *Educational Researcher*, *21*(3), 4–17.

Perrenoud, P. (1997). *Construire des compétences dès l'école* (3a ed.). Paris: ESF éditeur.

Perrin-Glorian, M. J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques: L'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(3), 279–321.

Prieto, J. M. (1997). Prologo. En C. Levy-Leboyer (Ed.), *Gestión de las competencias: Cómo analizarlas, cómo evaluarlas, cómo desarrollarlas* (pp. 7–24). Barcelona: Gestión 2000.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, *2*(3), 87–107.

Real Academia Española. (2001). Competencia. En *Diccionario de la lengua española* (22º ed.). Recuperado de http://lema.rae.es/drae2001/

Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2008*). Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rodríguez, H. (2007). El paradigma de las competencias hacia la educación superior. *Revista de la Facultad de Ciencias Económicas*, *15*(1), 145–165.

Roegiers, X. (2000). Saberes, capacidades y competencias en la escuela: Una búsqueda de sentido. *Innovación educativa*, *10*, 103–119.

Rychen, D. S., & Tiana, A. T. (2004). *Developing key competencies in education: some lessons from international and national experience*. Paris, France: UNESCO International Bureau of Education.

Saraiva, M. J. (1995). O saber dos professores: Usá-lo, apenas? Respeitá-lo e considerá-lo, simplesmente? En J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação?* (pp. 131–148). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educação.

Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. En D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), *Defining and selecting key competencies* (pp. 45–65). Ashland, OH, US: Hogrefe & Huber Publishers.

Weinert, F. E. (2004). Concepto de competencia: Una aclaración conceptual. En D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp. 94–127). México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

La consapevolezza dell'importanza del contesto sociale, culturale e politico del pensiero, dell'insegnamento e dell'apprendimento: alcuni elementi del mio percorso[1]

Luis Radford
Université Laurentienne, Canada

Abstract. *In this article I go through the basic elements of my own journey that have led me to the awareness of the importance of the social, cultural and political context of thinking, teaching and learning. After outlining the cultural background of Guatemala, the country in which I grew up, I describe my encounter with the completely different sociocultural context that I experienced during my PhD in France. During my doctoral studies I learned to appreciate the historical dimension of ideas and social actions. In the following years spent in Canada, my research has shown the link between mathematical historical ideas and their culture. The Canadian sociocultural dimension led me to a new form of alterity that has become pivotal in my recent work on ethics and in recognizing that knowing and being are deeply interrelated. Therefore I convey a conception of teaching and learning in which communication, responsibility and communitarian engagement become prominent aspects of life.*

Keywords: historical and sociocultural dimension, imaginary collective, cross-cultural psychology, alterity, ethics knowing and being, Castoriadis, Vygotsky, Lizcano

Sunto. *In questo articolo ripercorro le tappe fondamentali del cammino personale che mi ha portato a riconoscere l'importanza del contesto sociale, culturale e politico nell'insegnamento e nell'apprendimento. Dopo aver descritto il mio retroterra culturale nel quale sono cresciuto in Guatemala, analizzo l'incontro con il contesto socioculturale completamente diverso che ho vissuto durante il mio dottorato di ricerca in Francia. Gli studi di dottorato mi hanno introdotto all'epistemologia della matematica insegnandomi a riconoscere l'importanza della dimensione storica nello sviluppo del pensiero e dell'agire umano. Negli anni successivi trascorsi in Canada, le mie ricerche hanno evidenziato il legame tra pensiero matematico e cultura. L'immersione nella dimensione socioculturale del Canada mi ha aperto a una nuova forma di alterità che è centrale nel mio recente lavoro sull'etica e nel riconoscimento che sapere ed essere sono profondamente interconnessi. Dunque, una concezione dell'insegnamento e dell'apprendimento nel quale la comunicazione, la responsabilità e il coinvolgimento sociale diventano aspetti essenziali della vita.*

---

[1] Questo articolo è stato scritto nell'ambito di un corso di dottorato organizzato da P. Valero, T. Holmgaard Børsene e X. Du (Aalborg University, Danimarca, 2–5 novembre 2009), nel quale ho avuto il piacere di partecipare, su invito, come relatore. In occasione del primo intervento del corso, è stato chiesto ai relatori (W. M. Roth e me) di presentare le nostre riflessioni su come abbiamo iniziato a inserire le prospettive socio-culturali e politiche nel nostro lavoro accademico e nel nostro pensiero.

Parole chiave: dimensione storica e socioculturale, immaginario collettivo, psicologia interculturale, alterità, etica, sapere ed essere, Castoriadis, Vygotskij, Lizcano

Resumen. *En este artículo vuelvo a recorrer las etapas fundamentales del camino personal que me llevó a reconocer la importancia del contexto social, cultural y político en la enseñanza y en el aprendizaje. Después de haber descrito mi derrotero cultural en la cual crecí en Guatemala, analizo el encuentro con el contexto sociocultural completamente diferente que viví durante mi doctorado de investigación en Francia. Los estudios de doctorado me introdujeron en la epistemología de la matemática y me enseñaron a reconocer la importancia de la dimensión histórica en el nacimiento y en el desarrollo del pensamiento y del actuar humano. En los años sucesivos transcurridos en Canadá, mis investigaciones evidenciaron y confirmaron la relación entre pensamiento matemático y cultura. La inmersión en la dimensión sociocultural de Canadá me abrió a una nueva forma de alteridad que es central en mi reciente trabajo sobre la ética y en el reconocimiento que el saber y el ser están estrechamente relacionados. Por tanto, una concepción de la enseñanza y del aprendizaje en el cual la comunicación, la responsabilidad y la implicación social y política se vuelven aspectos esenciales de la vida.*

Palabras clave: dimensión histórica y sociocultural, imaginario colectivo, psicología intercultural, alteridad, ética, saber y ser, Castoriadis, Vygotsky, Lizcano

1. Il mio retroterra culturale

Sono lieto di poter raccontare come sono diventato consapevole dell'importanza dei contesti sociali, culturali e politici nell'insegnamento e nell'apprendimento, e di come questi contesti siano apparsi progressivamente nel mio lavoro. Sono grato di avere questa opportunità in quanto nel parlare a voi parlo a me stesso di queste cose per la prima volta, quantomeno in modo esplicito. Parlare ci rende consapevoli di cose che sono solo percepite, semi-percepite o in una zona della coscienza che è a metà tra il conscio e l'inconscio. Vygotskij (1987, p. 243), molti anni fa, nel suo libro *Pensiero e Linguaggio* cita il poeta degli inizi del XIX secolo, Osip Emilevich Mandelshtam che in *The Swallow* scrive:

> Ho dimenticato la parola che volevo pronunciare.
> E il pensiero, disincarnato, ritorna nel palazzo delle ombre.

Mentre riflettevo su come affrontare il tema di questo incontro sono diventato consapevole di molte cose, alcune le avevo già intuite, altre si sono presentate per la prima volta.

Lasciatemi cominciare accennando al retroterra da cui provengo. Sono nato in Guatemala – un piccolo paese di 110.000 km^2 (cioè due volte e mezzo le dimensioni della Danimarca) e con una popolazione stimata di 14.000.000 di abitanti. Il Guatemala è un paese segnato da forti contrasti. Culturalmente è molto ricco ma anche estremamente controverso. La sua ricchezza culturale si riflette nella quantità di lingue parlate nel paese. Oltre allo spagnolo, che è la lingua ufficiale, ci sono 22 lingue di derivazione Maya. Il paese è culturalmente controverso in quanto la sua ricchezza non è necessariamente riconosciuta come tale da coloro che parlano solo lo spagnolo, un atteggiamento questo che porta a una sorta di discriminazione etnica.

I contrasti marcati appaiono anche a livello socioeconomico. A fronte di poche persone che hanno molti soldi e vivono nel lusso, il 29% della popolazione vive al di sotto della linea di povertà. Dunque, crescere in Guatemala significa confrontarsi tutti i giorni con una macroscopica ingiustizia sociale e tutte le conseguenze che essa comporta, come il senso di insicurezza e le contraddizioni di un’ingiusta distribuzione della ricchezza.

Sono cresciuto a Città del Guatemala, vicino al centro, in un quartiere di chiese bellissime che hanno conservato alcune delle caratteristiche del periodo coloniale del XVII secolo. Tutti i giorni le campane delle chiese mi svegliavano, poi mi incamminavo verso la mia scuola che si trovava di fronte alla piazza centrale – un luogo circondato dal palazzo del Governo e dalla Cattedrale, a ricordare la divisione e l’alleanza tra potere spirituale e potere politico, tipiche delle ex colonie della Spagna. Ho frequentato l’Università Nazionale (Universidad de Santos de Guatemala) e ho conseguito la laurea in ingegneria. Durante gli anni da studente di ingegneria, ho avuto l’opportunità di incontrare molti studenti e professori che erano attivi contro i regimi oppressivi di destra e le forze militari e paramilitari, alleate con tali regimi. Alcuni di loro se ne andarono, altri rimasero e, tra questi, molti furono uccisi. Serbo in me il ricordo del loro coraggio, perché opporsi al regime era un atto di coraggio – un atto che poteva costare la vita. In particolare, serbo sempre in me il ricordo del mio professore di Analisi, Carlos Cabrera, che fu assassinato una sera mentre stava lasciando il campus universitario. Nel 1980, nel mezzo di un duro tumulto partii per intraprendere gli studi di dottorato in Francia.

2. L’esperienza di una cultura straniera

La mia permanenza in Francia mi ha sicuramente segnato in diversi modi. La struttura delle classi socio-culturali e il pensiero politico francese erano molto diversi da quello che conoscevo. Una cosa che mi colpì fu il fatto che la Francia è un paese i cui cittadini sono fieri del proprio passato. Io sono cresciuto in un paese nel quale, al contrario, la relazione con il passato era lungi dall’essere facile – anzi problematica in un senso importante. Mi spiego.

L’arrivo degli Spagnoli in Guatemala nel XVI secolo distrusse tutto. Al loro arrivo, gli spagnoli smantellarono le strutture sociali e politiche dei Maya e delle altre culture che trovavano sulla loro strada, e imposero le loro. Gli indigeni furono soggiogati e assimilati in una forma di vita completamente diversa dalla loro.

Di conseguenza, quando ci rivolgiamo al nostro passato, non è chiaro se ci dobbiamo riferire alle culture e alle civiltà precolombiane o alla civiltà mista e non coerente che è emersa dalla rimozione e dalla soppressione delle culture precolombiane compiute dagli spagnoli. Questa cultura non coerente che disprezzava gli indigeni e il loro mondo e che, allo stesso tempo, non era più europea, cercò di trovare la propria identità nel XIX secolo tagliando i propri legami politici con la Spagna. Ma tale mossa arrivò troppo tardi o fu semplicemente impossibile da attuare. La cultura che emerse dal XVII secolo in poi, basata su un impressionante massacro di indigeni e sulla sottomissione dei sopravvissuti, era costituita anche da un'ampia popolazione di "mestizos", derivante dai rapporti tra i colonizzatori bianchi e le donne aborigene. Né aborigena né europea, la nuova popolazione di "mestizos" e i discendenti degli spagnoli ebbero difficoltà a trovare la propria identità.

Dunque, quando ci rivolgiamo al nostro passato non è chiaro se dobbiamo riferirci alle civiltà precolombiane o a quella non coerente dei colonizzatori alienati e delle persone colonizzate. Per comprendere la portata della tensione che ci impedisce di trovare il nostro passato, faccio riferimento al teorico della sociologia Cornelius Castoriadis e alla sua nozione di *immaginari collettivi* (Castoriadis, 1987). Gli immaginari collettivi appartengono all'*ordine simbolico* di una società. Appartengono alle strutture ideali che le società costruiscono sulla base di ciò che è già presente del loro passato. Gli immaginari collettivi incorporano gli individui e offrono loro forme sociali di significazione. Non sono ben definiti, poiché una delle caratteristiche degli immaginari collettivi è che c'è sempre uno scarto tra i segni e i loro oggetti. Sono difficili da circoscrivere, tuttavia sono lì. Ciascuno di noi partecipa all'ordine simbolico della nostra società; questo è ciò che ci differenzia da altri individui di altre culture. C'è una sorta di implicito obbligo nei confronti di ciò che ci rende simili come collettivo e diversi dai membri di altre formazioni collettive culturali. Adottando la terminologia di Castoriadis, direi che i conquistatori spagnoli hanno fatto molto di più che prendere l'oro delle culture precolombiane. Hanno semplicemente mutilato il loro immaginario collettivo. Se non siamo in grado di trovare il nostro passato, se non riusciamo a vederlo, è perché il nostro immaginario collettivo è stato decapitato.

Quando arrivai in Francia rimasi dunque molto impressionato nel vedere quanto fosse facile per i francesi riconoscere il loro passato. Rimasi molto impressionato nel vedere la loro continuità storica, anche negli eventi di rottura politica derivanti dalla Rivoluzione Francese nel XVIII secolo, e il conseguente emergere di nuove identità. È vero, ci fu una rottura. Tuttavia ci fu anche una continuità storica, un prospettiva dalla quale distinguere il prima dal dopo. La struttura di governo francese precedente era una monarchia assoluta con privilegi feudali per l'aristocrazia e il clero cattolico. Con la Rivoluzione, questa struttura subì cambiamenti radicali basati sui principi di cittadinanza e dei diritti inalienabili adottati dall'Illuminismo.

La Rivoluzione Francese, infatti, non apparve improvvisamente come un fulmine a ciel sereno. Fu l'espressione politica, economica e concreta delle idee dell'Illuminismo e dell'espansione di nuove forme di produzione liberale. In effetti, la Rivoluzione Francese e la prima critica di Kant, *La Critica della Ragion Pura* – una delle opere più illuminate – sono contemporanee tra loro, solo otto anni di differenza. La Rivoluzione francese non fu, dunque, un episodio completamente inaspettato, che apparve improvvisamente. Al contrario, l'arrivo dei conquistatori spagnoli in quello che chiamiamo continente americano fu totalmente inaspettato. I conquistatori spagnoli arrivarono letteralmente come un fulmine a ciel sereno.[2]

La riverenza dei Francesi verso il loro passato fu dunque per me qualcosa di sorprendente, incredibile. Tuttavia, la venerazione dei francesi del loro passato non fu l'unica cosa a sorprendermi. Culturalmente parlando, rimasi impressionato anche dal ritrovarmi di fronte a forme di alterità – vale a dire forme di atteggiamenti e di relazioni con l'altro – significativamente differenti. Infatti, erano molto diverse da quelle che già conoscevo.

3. La dimensione intellettuale

Lasciatemi dire ora qualcosa sull'aspetto intellettuale della mia esperienza europea. Ho trascorso il primo anno studiando matematica. Per diventare un didatta della matematica in Francia (almeno negli anni '80) era necessario essere prima un matematico. Riconobbero alcuni degli esami che avevo sostenuto presso la Facoltà di Ingegneria in Guatemala, e mi chiesero di cominciare a frequentare alcuni corsi di matematica post-laurea. Studiare matematica fu per me un'esperienza molto ricca. Mi piaceva studiare matematica, in quanto non mi era mai piaciuto nient'altro. Ho scoperto qualcosa che prima pensavo impossibile: la matematica come un'esperienza estetica. C'era qualcosa di estremamente nuovo – qualcosa che ha una certa somiglianza solo con l'esperienza poetica, musicale e artistico-visiva: l'esperienza della matematica, vale a dire, la bellezza di dimostrare, esplorare, riconoscere, generalizzare, in breve l'esperienza di essere meravigliati. L'anno dedicato alla matematica è stato forse uno dei migliori della mia vita. Ricordo come avrei voluto che quelle giornate fossero più lunghe…

Come nella mia nuova vita culturale, le differenze erano presenti anche nella mia vita intellettuale. L'approccio francese alla matematica era diverso da quello a cui ero abituato. I libri di testo su cui avevo imparato la matematica erano traduzioni di testi universitari degli USA. Erano molto diversi dallo stile bourbakista dei francesi. Dunque, non fu facile adattarsi, ma ci riuscii. Entrai in una nuova forma di pratica matematica che aveva i suoi modi di porre e risolvere i problemi, un proprio modo di teorizzare. Molto

[2] Per quanto ne so, uno dei migliori resoconti culturali dell'invasione spagnola è il libro di Tzvetan Todorov, *La conquête de l'Amérique* [La conquista dell'America] che ho scoperto nel 2001.

francese. Molto cartesiano.

Infatti, la filosofia della matematica bourbakista è completamente cartesiana. Nell'ossessione di Bourbaki di cominciare con principi chiari e distinti – che è l'idea di analiticità portata avanti dal grande Descartes – si possono riconoscere le sue famose *Regole per la Guida dell'Intelligenza.*

Ho imparato ad apprezzare la bellezza del rigore, della concisione, dell'eleganza matematica e di molti altri valori matematici estetici francesi. Ho imparato ad apprezzare anche il vino francese.

Sembrano cose di poco interesse per questa discussione, ma di fatto giocano un ruolo importante. Le culture ci forniscono la materia prima per formare le idee estetiche, scientifiche, matematiche, politiche etc. Senza essere delle camicie di forza, le culture ci incorporano in reti simboliche di significazione e ci offrono uno spazio simbolico di possibilità per pensare, sentire, amare e agire in un certo modo.

L'università nella quale studiavo aveva un piano di studi nel quale la psicologia e l'epistemologia erano due assi portanti. Studiavamo Piaget in dettaglio. La questione del pensiero matematico cominciò ad attrarmi. Frequentai un corso di logica e rimasi molto impressionato dal dibattito tra le correnti classiche, intuizioniste e costruttiviste e dalle loro differenze. Un aspetto che mi colpì in modo significativo fu il fatto che i matematici non erano in realtà d'accordo sulle questioni riguardanti i fondamenti della matematica! La matematica non era così solida come pensavo. Alcuni accettavano certe dimostrazioni, altri no; per alcuni matematici alcune dimostrazioni dimostrano, ma per altri le medesime dimostrazioni non dimostrano realmente. Scoprii così che la verità e i modi per affermarla sono relativi.

Il tema di ricerca del mio dottorato era il pensiero logico. I miei tutor di tesi erano Georges Glaeser, François Pluvinage e Raymond Duval. Ero in particolare interessato alle questioni riguardanti il ragionamento deduttivo. In che modo gli studenti interpretano e trattano le asserzioni implicative? Riescono a distinguere le condizioni necessarie da quelle sufficienti? Il modo in cui le domande erano poste era molto piagettiano. Volevo sapere se alcune persone nel mondo usavano altre logiche, diverse da quella aristotelica classica. Volevo sapere se esistevano ricerche su questo tema. Mi ricordo che andai dal mio professore di logica formale, che era un grande matematico. Dopo averci pensato un po', mi consigliò l'unico libro che gli era passato per la mente – la Bibbia!

Scoprii molti anni dopo che, quando posi quella domanda, la psicologia interculturale come disciplina scientifica stava appena emergendo. Mi ci sono voluti anni, dieci per la precisione, per scoprire che la mia risposta non poteva venire dalla ricerca psicologica classica (a maggior ragione dalla didattica della matematica), ma da un campo di ricerca emergente, la cui via fu aperta da alcuni sociologi come Émile Durkheim, Lucien Lévy-Bruhl, Claude Lévi-

Strauss. Ho avuto bisogno di molti anni per capire che la mia questione era al centro delle ricerche condotte da Vygotskij e dalla sua scuola di pensiero storico-culturale. A metà degli anni '90 venni a conoscenza delle famose spedizioni psicologiche di Luria in Asia Centrale. Quegli anni furono molto importanti per me. Formulai la mia domanda di ricerca nel 1985, l'anno successivo a quello in cui l'opera magna di Vygotskij, *Pensiero e Linguaggio*, fu finalmente tradotta in Francese. Infatti, Vygotskij fu conosciuto in Francia molto tardi. E per quanto riguarda la didattica della matematica, non fu molto popolare; nemmeno ora lo è. Come ho scoperto in seguito, nel 2009, durante una visita all'Università di Ginevra in occasione del "Premier Colloque International de l'Association pour des Recherches Comparatistes en Didactique", Vygotskij è stato molto più popolare nella terra di Piaget che in Francia!

4. Il ritorno alle mie origini e l'esperienza canadese

Dopo aver finito il mio dottorato in Francia, ritornai al mio paese di origine. Mi aspettavo che il ritorno e la reintegrazione nella mia cultura avvenissero senza problemi. Ebbene, con mio orrore, non fu così. Mi sentivo un alieno nel mio paese. Mi ci vollero quasi tre anni per adattarmi. E le cose non furono mai più come prima. Le culture e i loro individui sono in continuo mutamento. Noi cambiamo, così come cambia tutto quello che ci circonda. Le culture non sono statiche, neanche i loro individui. I legami possono spezzarsi senza la possibilità di ripristinarli.

Alla fine, dopo sei anni trascorsi in Guatemala, ricevetti un invito ad andare a Montreal per lavorare con un gruppo di ricerca diretto da Nadine Bednarz, che si occupava di algebra. Il gruppo di ricerca era molto valido e includeva bravi didatti della matematica. Abbiamo condotto molte ricerche sperimentali. Il gruppo includeva anche due storici della matematica – Louis Charbonneau e Jacques Lefebvre. Allora mi dedicai a uno studio attento dei lavori di Viète e Diofanto. Nel 1992 scrissi il mio primo articolo "epistemologico", a cui seguirono una serie di articoli sull'evoluzione del pensiero algebrico. Guardando retrospettivamente quell'epoca della mia vita, riconosco in essa due aspetti del mio soggiorno in Francia. Come ho accennato precedentemente, l'epistemologia era una parte importante del mio piano di studi di dottorato di ricerca. Ma ancora più importante è stato il riconoscimento di una dimensione che ho imparato ad apprezzare in Francia – la dimensione storica delle idee e dell'agire sociale.

Come potete vedere – e penso che non sia qualcosa di specifico del mio percorso personale – i nostri interessi nella vita, scientifici e non, sono modellati dalle nostre esperienze culturali. Il fatto che questa esperienza non venga articolata, il fatto che rimanga implicita, non significa che non sia presente. Nel mio caso, la scoperta del fascino che i francesi provano nei confronti del loro passato mi ha portato ad apprezzare la storia come una categoria generale per la costruzione di senso.

Le ricerche nel campo della storia che ho condotto nella prima metà degli anni ’90 sono state importanti nel rendermi consapevole del fatto che, in diversi periodi storici, i matematici non si sono posti le stesse domande. Al contrario, le domande e i metodi usati per affrontarle sono stati molto differenti – a volte incommensurabilmente differenti. Contrariamente a quello che i resoconti standard della storia della matematica dicevano, il pensiero matematico non è qualcosa di universale ma piuttosto in continua evoluzione. Non è come un girino che necessariamente diventa una rana. Un po’ alla volta è emersa l’idea che la cultura sia la causa della diversità delle varie forme di pensiero matematico.

Naturalmente, le idee scientifiche venivano facilmente associate alla loro origine culturale. Non era così per le idee matematiche. E, in quel periodo, solo un numero molto limitato di storici della matematica aveva osato collegare il pensiero matematico alla cultura. Come costruire, in termini teorici, il collegamento tra le idee matematiche storiche e la loro cultura? Mi era chiaro che una giustificazione causale era destinata a fallire. Nell’*Anti-Dhuring*, Engels scrive:

> Ogni forma di produzione materiale definita storicamente ha la sua corrispondente forma di produzione spirituale. Quindi per esempio, una forma di produzione spirituale differente da quella prevalente nel Medio Evo si inserisce nel capitalismo. (Engels, come citato in Vygotskij, 1994, p. 177)

Ciò nonostante, sospettavo che vi fosse qualcosa di più complicato di una mera associazione della dimensione spirituale e ideologica a quella materiale. Non ci può essere un collegamento diretto causale o di altro tipo.

Fui molto felice quando, molti anni dopo, trovai questa sorprendente affermazione che Vygotskij fece in uno dei suoi lavori più importanti, dal punto di vista dello sviluppo delle sue idee: “La realtà esiste persino nelle astrazioni immaginarie della matematica” (Vygotskij, 1997, capitolo 5).

Questa questione occupò molto del mio tempo a metà degli anni ’90. Nel 1996 lessi un libro estremamente interessante che mi aiutò molto. È stato scritto dal sociologo spagnolo Emmanuel Lizcano (1993). Rimasi così impressionato dal libro che ne scrissi una recensione. Apparve in spagnolo in una rivista pubblicata in Messico e con una grande diffusione nei paesi di lingua spagnola (Radford, 1996). In questo libro, Lizcano poneva la domanda sul legame tra pensiero matematico e cultura in maniera foucaultiana. Diceva:

> In tutte le costruzioni culturali, i corrispondenti immaginari sociali orientano i modi secondo cui la matematica è concettualizzata. Tali modi determinano in modo radicale i contenuti matematici (...) Ci sono tante matematiche quante sono le forme del pensiero e del parlare, forme che non sono altro che espressione dei loro immaginari collettivi. (Lizcano, 2009, p. 265)

Attingendo al libro di Lizcano, nel 1997 pubblicai un articolo nella rivista *For the Learning of Mathematics,* che affrontava la questione del pensiero matematico e della cultura e cercava di mettere in luce la rilevanza di tali questioni per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica (Radford, 1997). Cercavo di convincere i miei colleghi che l'idea di Brousseau di ostacolo epistemologico, che in quel momento era diventata molto popolare, era basata su una concezione universalista dello sviluppo, incompatibile con una visione socioculturale, e che c'erano delle buone ragioni per ritenere che una tale idea non fosse così utile come si era pensato fino ad allora.

4.1. Dal Québec all'Ontario: L'alterità come un'esplicita categoria dell'Essere

Lasciatemi tornare ai passi successivi del mio percorso nella dimensione culturale e raccontare qualcosa di quello che mi è successo quando sono andato a Montreal. Con mia grande sorpresa, l'inserimento nella mia nuova cultura canadese è stata facile. Forse perché avevo accumulato così tante cicatrici che la cosa non era più così importante. O forse era la sensibilità e l'apertura dei canadesi verso l'altro e verso lo straniero che mi hanno fatto sentire da subito a casa. Ma per me le cose non si fermarono lì. L'anno successivo mi sono trasferito in Ontario. Sentirsi immerso in un ambiente di lingua inglese era qualcosa di nuovo. Dovevo imparare una nuova lingua e immergermi in un nuovo modo di pensare e di vivere. Mi sono reso conto che mentre il francese è simile allo spagnolo, l'inglese è un'altra cosa.

Col passare del tempo, imparai ad apprezzare cose nuove. Una delle principali "scoperte" per me fu il fatto che le culture devono rimanere aperte per assicurare una partecipazione diversificata e uno sviluppo equo per tutti. Ho utilizzato le virgolette perché non fu una scoperta teorica o personale, ma una scoperta sociale, qualcosa che ho scoperto nella mia interazione con gli altri. Scoprii anche qualcosa che era rimasto come una specie di intuizione e che raggiunse, sul suolo canadese, un nuovo livello di esplicitazione, vale a dire una nuova forma di alterità, qualcosa che è poi diventato un tema centrale nel mio recente lavoro sull'etica (Radford, 2008). Con questo intendo dire che ho imparato che la nostra relazione con l'altro è l'aspetto fondamentale della vita umana. L'attenzione all'alterità, nel senso suddetto, è il centro dei modi di vivere intenzionali e socialmente appaganti; sostengo che sia l'unico modo per evitare la dimensione alienante delle società moderne e post-moderne. Potrebbe non essere sbagliato affermare che il mio attuale interesse per l'etica e la consapevolezza che la coscienza non sia riducibile al sapere, ma che sapere ed essere siano profondamente interconnessi, sono l'articolazione di una caratteristica estremamente importante del modo di vivere canadese. Probabilmente sto articolando qualcosa che è già presente lì, nel collettivo immaginario canadese, prendendo in prestito la terminologia di Castoriadis.

Nella mia ricerca e nel mio insegnamento cerco di trasmettere queste mie scoperte, maturate nei miei spostamenti da una cultura all'altra. Cerco di allontanarmi dalle concezioni razionalistiche e strumentali dell'insegnamento e dell'apprendimento e, piuttosto, di trasmettere una concezione in cui la comunicazione, la responsabilità e il coinvolgimento sociale diventino aspetti prominenti della vita (Radford, 2009).

Spero che questo percorso personale risponda alle domande del primo incontro. Penso che metta in evidenza come sono diventato consapevole dell'importanza del contesto sociale, culturale e politico del pensiero, dell'insegnamento e dell'apprendimento. Mostra anche come da tale riconoscimento sia emersa una progressiva consapevolezza delle relazioni profonde tra l'apprendimento e i suoi aspetti sociali, culturali e politici – una consapevolezza che ha portato a un cambiamento nel mio pensiero precedente.

Riferimenti bibliografici

Castoriadis, C. (1987). *The imaginary institution of society.* Massachusetts: M.I.T. Press.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática: La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia.* Barcelona: Gedisa.

Radford, L. (1996). Lizcano y el problema de la creación matemática. *Mathesis*, *12*(4), 399–413.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2009). L'altérité comme problème éducatif. In J. Boissonneault, R. Corbeil, & A. Hien (Eds.), *Actes de la 15e journée Sciences et Savoirs* (pp. 11–27). Sudbury: Université Laurentienne.

Vygotskij, L. S. (1987). *The collected works of L. S. Vygotsky. Problems of general psychology, including the volume Thinking and speech* (Vol. 1) (R. W. Rieber, A. S. Carton, & J. Wollock, Eds.). New York: Plenum/Kluwer.

Vygotskij, L. S. (1994). The socialist alteration of man. In R. V. Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 176–184). Oxford: B. Blackwell.

Vygotskij, L. S. (1997). The historical meaning of the crisis in psychology: A methodological investigation. In R. W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *The Collected Works of L. S. Vygotsky* (pp. 233–343). New York: Plenum Press.

[Traduzione di George Santi]

CONVEGNI E CONGRESSI

Convegno Nazionale *Incontri con la Matematica* n. 31

Matematica, Didattica e Scuola: fra ricerca e prassi quotidiana

Castel San Pietro Terme (Bologna)
10-11-12 novembre 2017

Sono previste conferenze, seminari specifici, laboratori, poster, sessioni teatrali, conferenze serali. Il programma sarà disponibile a partire dal mese di giugno nei siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net
Alcune delle conferenze in programma sono state affidate a:
Samuele Antonini, Anna Cerasoli, Benedetto Di Paola, Angelo Guerraggio, Nicolina Malara, Maria Alessandra Mariotti, Maria Mellone, Giancarlo Navarra, Ennio Peres, Silvia Sbaragli.

RECENSIONI
E SCHEDE BIBLIOGRAFICHE

a cura di B. D'Amore

Schede bibliografiche

Odifreddi, P. (2016). *Dizionario della stupidità*. Milano: Rizzoli.

Credo che tutti conoscano la celebre frase di Einstein: *Due cose sono infinite, l'universo e la stupidità umana, ma sull'universo ho ancora dei dubbi*; e il trattato dell'economista Carlo Cipolla del 1976, *Le leggi fondamentali della stupidità umana*, che enuncia i famosi 5 principi sulla stupidità. Ma in questo dizionario queste citazioni sono solo due voci, in una raccolta che ne comprende centinaia, che vanno dalle cravatte a Grillo, dalla monogamia agli OGM, dai vampiri agli IgNobel, un repertorio notevole, esilarante e profondo.

C'è di tutto, in tutti i campi possibili, dalla religione alla letteratura, dalla scienza all'arte, dalla politica all'economia.

Dietro l'eufemismo della battuta ironica, si nascondono verità etiche e sociali, grazie a un modo di saper vedere e interpretare quel che accade nel mondo, le credenze più banalmente e acriticamente diffuse, i modi d'essere vuoti e insensati. Basti leggere le voci "immigrati", "petrolio", "Maometto", "immacolata", "velo", tanto per fare alcuni esempi.

Alcune posizioni dell'autore sono contro corrente, lo sa lui per primo, irriverente e … impertinente, e lo sanno i lettori; ma sempre profondamente logiche e dannatamente ragionevoli; e ogni voce fornisce una grande quantità di informazioni, in ogni campo, con dettagli preziosi per chi ama la citazione colta. Spesso l'ironia è pungente, insolente e sottile; a volte è violenta, specie nei riguardi di chi si riconosce nel soggetto definito "stupido" e descritto in una voce. Il che capiterà più d'una volta, a qualsiasi lettore.

Ma proprio questo è il vantaggio di chi è disposto a leggere con capacità autocritica, evitare d'essere annoverato tra gli stupidi, almeno per qualche ragione che potrebbe essere evitata.

Danese, B. (2015). *Laboratorio in scatola*. Verona: Edizione Reinventore.

Spesso si accusa la matematica di essere una scienza astratta e perciò arida, cioè secca, asciutta, nel senso che si costruisce solo nella mente, nulla a che fare con la realtà, non si possono fare prove di laboratorio; anche se questo non è del tutto vero, come mostrano i tanti "laboratori di matematica" disseminati nelle nostre scuole, indubbiamente la matematica soffre un po' nel confronto ludico con le scienze.

Caspita, qui bastano bottiglie di plastica piene d'acqua messe in frigo la sera prima, pipette, candele, bicchieri capovolti, un po' di colorante alimentare blu, foglietti di carta, sale da cucina, allume, due gocce d'olio, una pompa da bicicletta … insomma cosa facili da trovare, a disposizione di chiunque, e si possono fare esperimenti bellissimi alla portata di tutti, esperimenti che sorprendono, conquistano, insegnano, divertono, entusiasmano.

Se poi vieni a sapere che questi apparenti giochi sono stati proposti nella storia da Marie Curie, Galileo Galilei, Marcello Malpighi, Frank Oppenheimer, Alessandro Volta, Robert Boyle, Michael Farady, … beh, allora ti senti un vero scienziato anche tu.

A questa gioiosa attività scientifica, ricca di sorprese e di apprendimenti indimenticabili ci conduce Beniamino Danese, con questo divertente, spiritoso ma colto libro, nel quale raccoglie e descrive con cura un bel po' di esperimenti facili da realizzare, ma tali da lasciare un'impronta scientifica di alto livello.

E poi ci sono le storie, e che storie!, narrate in maniera avvincente; ci riportano all'epoca nella quale ciascuno di questi scienziati visse, e lo fanno con eleganza e semplicità, con una narratività trascinante.

La cosa che colpisce è che questi esperimenti sono pensati per le classi di scuola primaria, dunque con conoscenze scientifiche di base quasi nulle; stanno in piedi da sé, senza bisogno di precedenti fasi di preparazione. Sorprendono proprio perché sono immediatamente comprensibili e realizzabili.

Le compiono insieme insegnanti e allievi, ma le potrebbero senz'altro effettuare da soli gli studenti, in modo opportuno.

Beniamino, l'autore, è dottore di ricerca in fisica ma si delizia a raccontare e far vivere la scienza ai bambini (e agli insegnanti), con sorpresa, come fosse un viaggio affascinante e allegro, come di fatto è. Con il fratello (gemello) Emanuele ha fondato la società Reinventore che non solo pubblica in proprio questo libro piacevolissimo, ma fornisce anche kit già predisposti per rendere più snella la fase di preparazione di questi esperimenti.

Si tratta di un libro di poco meno di 100 pagine, pieno di illustrazioni, racconti, fotografie, immagini, una vera facile guida agli esperimenti in vari campi delle scienze: fisica, chimica, anatomia, biologia, …

Un vero gioiello didattico che raccomandiamo a tutti gli insegnanti di primaria che hanno a cuore l'insegnamento-apprendimento delle scienze.

Nicosia, G. G. (2016). *Matematica e scuola in Cina, Corea e Giappone. Elementi culturali estremo-orientali per la didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Al di là delle mille ghiotte notizie su tre mondi che sì, hanno parecchio in comune, ma anche differenze notevoli (che, nella nostra ignoranza occidentale, tendiamo a trascurare), si tratta di un libro colto, avvincente e appassionante che vale la pena leggere con estrema attenzione.

Che cosa sia il pensiero matematico in Cina, Corea e Giapppone e come lo si interpreta da un punto di vista scolastico, lascerà di stucco più dì'un lettore. Perché ci sia questa diffusa convinzione sul fatto che i bambini cinesi siano "più portati" alla matematica dei bambini nostrani, verrà finalmente chiarito. Che legami ci siano o, meglio, non ci sono, fra il nostro modo di intendere la didattica e la loro, è perfettamente messo in luce.

Ma quel che più colpisce è l'idea di scuola che emerge, l'idea di che cosa sia l'impegno scolastico in genere, e nella matematica in particolare.

Giovanni Giuseppe ci racconta del suo viaggio di studio in Estremo Oriente, ma anche dei suoi studi così settoriali precisi e profondi. Colpisce molto la scansione dei programmi scolastici che, fin dalla scuola primaria, sono concepiti in modo così profondamente diverso dai nostrani. Come e che cosa si intende per "risolvere un problema", a casa e a scuola. Che cosa sia una vera attività matematica pomeridiana, che relazione vi sia fra la richiesta del docente, quella della scuola, della famiglia, l'impegno personale profuso per avere successo. E poi ci sono i termini matematici, aritmetici e geometrici; la profonda differenza di interpretazione dell'idea stessa di matematica; l'uso di strumenti di calcolo, tra i quali spicca il più famoso, il soroban, che ho visto l'autore GG illustrare a bambini e insegnanti appassionati anche in Italia; che cosa intendere per "dimostrazione"; come la lingua cinese entri a far parte del senso stesso dell'apprendimento della matematica; come l'errore individuale sia compartito e fatto proprio all'interno di un gruppo di lavoro in aula; l'importanza storico, etica, estetica degli algoritmi nei diversi Paesi; se il grande pensatore Confucio debba e possa essere considerato un matematico; fantastici esempi di problemi; come avviene la formazione dei docenti, …

Ci sono insomma mille motivi diversi e tutti significativi per leggere questo libro quale che sia il livello scolastico al quale si insegna matematica; anzi, anche se non si insegna matematica perché l'informazione dotta che se ne trae supera in grande misura la disciplina stessa e si fa discorso generale.

A me, poi, amante dell'etnomatematica, più volte citata dall'Autore, questo libro è piaciuto immensamente anche per il totale rispetto delle differenti civiltà senza la solita pretesa che emerge sempre del confronto con la nostra. Un atteggiamento di rispetto colto e significativo che mi ha affascinato.

Altro punto molto interessante e attraente è la differente idea di logica che appartiene a questi mondi, così lontana da quella aristotelica alla quale noi siamo appassionatamente legati in maniera miopicamente univa. Sembra un punto di distanza banale, ma non lo è; forse, insieme alle tre diverse lingue (che, poi, in realtà, sono assai di più), è uno dei nodi cruciali adatti a spiegare le differenze.

Laparra, M., & Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe. Des liens entre énumération, oralité et littératie*. Louvain-la-Neuve: De Boeck.

Marceline Laparra e Claire Margolinas sono rispettivamente studiose di didattica della lingua francese e della matematica; la seconda è ben nota al pubblico italiano per essere una delle allieve dirette di Guy Brousseau, per aver tenuto conferenze al convegno *Incontri con la Matematica* di Castel San Pietro Terme, per aver più volte pubblicato lavori di ricerca in didattica della matematica in Italia.

Questo libro è un bell'esempio da imitare: un incontro di ricerca e di analisi didattiche che coinvolge due discipline che, invece di essere agli antipodi, come ritengono alcuni ingenui, hanno profondi legami. Basti solo questo: spesso viene considerata mancanza di conoscenza matematica quella che, a rigore, è incapacità di interpretazione del testo scritto. Alcuni insegnanti sono abituati a parafrasare, a interpretare, a disambiguare i testi scritti, per esempio dei problemi di matematica; tanto che, quando il bambino deve affrontare la lettura di essi da solo, non sa interpretarne il testo, non capisce il senso dei dati e della domanda, non sa disambiguare eventuali punti oscuri. Non risolve il problema o non capisce il testo, non per deficienze in matematica, ma per disabitudine all'interpretazione linguistica.

Ma questo non è che un esempio.

Si pensi al diffuso uso che si fa della lingua comune in matematica, non solo nel testo dei problemi, ma anche nelle descrizioni, nelle definizioni, nelle narrazioni, nelle illustrazioni delle figure e delle attività, nella spiegazione degli algoritmi.

E viceversa. Come ha mostrato in Italia la collega e amica Maria Luisa Altieri Biagi fin dagli anni '80, far proprio l'apparato logico della lingua italiana (scritta e orale) è fondamentale per poter far uso corretto e soprattutto consapevole della lingua stessa. Non è un caso che, nel corso delle riunioni e discussioni di studio per la redazione dei famosi Nuovi Programmi del 1985, Maria Luisa era spesso invitata a far parte del gruppo dei matematici.

Questo libro di Marceline e Claire è dedicato alla scuola dell'infanzia, valore in più, secondo me, perché sono pochi i lavori di ricerca, così brillanti per questo importante segmento scolare che, invece, merita di più. E spero sia un esempio da seguire per chi, anche in Italia, è disposto a scommettere sull'intersezione fra queste due tipologie di ricerche. Qui enumerazione, oralità e basi letterarie sono considerate come un tutt'uno, come dovrebbe essere e come, spesso, non è.

Cotti, C., Ferrero, G., & Morini, F. (2013). ***Serendipity. Incontri e avventure di un matematico*****. Parma: MUP.**

Da tanti anni non mi divertivo tanto, finalmente un libro di divulgazione matematica che soddisfa alle condizioni più ovvie e corrette: (a) leggibilità e comprensibilità da parte di un non esperto, (b) correttezza delle informazioni.

Dico di più.

(a) Alcuni libri di cosiddetta divulgazione scientifica sono comprensibili solo a un gruppo selezionato di esperti; l'autore spesso rinuncia a farsi capire dai non addetti al lavoro perché teme le critiche dei colleghi; e così, finisce con lo scrivere per loro. La difesa, talvolta solo implicita, talaltra esplicita, è che la scienza (in generale, la matematica in particolare) non è divulgabile. Questo libro tratta di mille argomenti matematici che il protagonista racconta, spiega, divulga sotto forma di problemi, curiosità, storie, narrazioni, … a vari interlocutori che sono colleghi del dipartimento di storia, studenti e perfino idraulici. Argomenti matematici che, così come sono trattati, sono davvero comprensibili a chiunque.

(b) E tuttavia le narrazioni matematiche sono corrette, spiegate spesso senza formalismi, è vero, ma assolutamente corrette. Anzi, di più. Circolano, fra i testi di divulgazione matematica, leggende o avvenimenti che si sono affermati, ai quali tanti autori fanno riferimento, ma che non sono del tutto o per nulla veritieri. Gli autori citano queste storie spesso sapendo che non ci sono prove reali del fatto che siano davvero avvenute; ma le citano lo stesso soprattutto perché sanno che fanno parte delle attese del lettore, e non stanno a sottilizzare sull'attendibilità delle fonti. In questo libro, tutte le informazioni sono commentate anche da questo punto di vista. Spesso gli Autori narrano la storia, ma la mettono in dubbio, con sagacia e competenza.

E così, il nostro personaggio principale, il matematico FU, affronta i tanti argomenti in differenti eventi e con differenti pubblici, talvolta in forma privata.

Ma il titolo richiama un termine che viene oggi usato con una certa libertà, *serendipity*. L'origine corretta di questo termine è perfettamente narrata nella prefazione di Claudio Bartocci; in questo libro è usata nel senso di: trovare risposte a problemi che ci si pone quasi senza volere, risposte che pur essendo casuali, possono essere "meravigliose", illuminanti e decisive. Secondo i nostri Autori, e secondo la tradizione di questo termine, la serendipity è caratteristica propria della ricerca matematica.

Le note a piè pagina sono un libro nel libro, propongono ghiotte notizie storiche, citazioni bibliografiche, spiegazioni formali di frasi comprese nel testo, curiosità avvincenti, riferimenti continui ai personaggi storici citati; senza esagerare, possono essere considerate assai più di un complemento al libro, ma una vera e propria forma di notizie ghiotte, corrette a loro volta, da sfruttare in ogni occasione.

Ho scritto in diverse occasioni, parlando di una eventuale funzione della

storia della matematica nel processo di insegnamento-apprendimento, che ci sono tre caratteristiche di essa:
(1) una funzione di analisi critico-epistemologica, adatta a studenti avanzati ai quali la pura informazione matematica non è più sufficiente; mi riferisco a certi dottorandi, a futuri insegnanti, a certi corsi di master;
(2) una funzione di accompagnamento alla pratica di insegnamento-apprendimento per collocare epistemologicamente e cronologicamente i diversi argomenti della matematica e dare loro una ragione storica affinché gli studenti non credano che la creazione matematica sia avvenuta tutta contemporaneamente, chissà perché in tempi antichi, come se oggi si fosse esaurita (non ci si crederà, ma molti sono coloro, anche persone colte, che la pensano così);
(3) ultima funzione, la più banale e forse mal considerata, ma per me importante: ridare alla creazione matematica una caratteristica umana: la matematica è stata creata dagli esseri umani per risolvere problemi aventi a che fare con la vita quotidiana, a diversi livelli; non è una creazione aprioristica che dobbiamo a una qualche divinità, è una lotta continua quotidiana umana.

In questo libro, secondo me, tutte e tre queste versanti sono presenti, in maniera mirabile. Tanto che consiglio la sua lettura non solo agli esperti, non solo a chi ama la divulgazione scientifica, ma anche e forse soprattutto agli insegnanti di matematica che operano nei vari livelli scolastici; addirittura suggerisco che facciano leggere brani di questo libro ai loro studenti, singolarmente o in gruppo, e che li discutano. Certo, si perderà "tempo prezioso per lo svolgimento del programma", come dicono alcuni, ma ne guadagnerà la comprensione, la capacità critica e la simpatia nei riguardi di questa nostra disciplina, da noi tanto amata, ma talvolta così mal vista.

Catastini, L., Ghione, F., & Rashed, R. (2016). *Algebra. Origini e sviluppi tra mondo arabo e mondo latino*. Roma: Carocci.

Tutti noi, amanti della storia della matematica, abbiamo citato e citato mille volte uno fra i libri *più famosi al mondo*, il *Kitāb al-jabr wa al-muqābala* (scritto fra l'813 e l'833) di uno dei *più famosi matematici al mondo*, Muhammad ibn Mūsā al-Khuwārizmī (780 ca. – 850 ca.), scienziato alla corte del califfo al-Ma'mūn (786 – 833), fondatore di una delle scuole di cultura universale *più significative al mondo*, la *Casa della Sapienza*, a Baghdad (830).

Eppure, posso scommettere, ben pochi di noi l'hanno letto; io personalmente avevo intravisto spezzoni in italiano e soprattutto in francese, ma mai l'opera completa in italiano. Ebbene, eccola qua.

Questo libro, che non esito a definire eccellente e coinvolgente, comprende in realtà due testi in uno; da pagina 115 a pagina 199 si trova la traduzione italiana quasi integrale di questo capolavoro arabo (dico quasi, perché è stata epurata da brevi parti la cui appartenenza alla versione originale è dubbia). Sorprendente, devo dire, per certi suoi contenuti e per il contrasto vivissimo fra certi contenuti modernissimi e la sua scrittura totalmente retorica, come ebbe a definirla il grande storico tedesco della matematica Georg Ferdinand Nesselmann (1811 – 1881). Certo, per noi, oggi, abituati a un linguaggio simbolico algebrico comodissimo e semplicissimo, leggere l'algebra tutta a parole è piuttosto stravagante. L'incognita, al-shay', cioè la cosa; a volte jidhr, la base, l'origine, la radice di un albero; māl, tesoro, somma di danaro, il quadrato dell'incognita; mentre il quadrato della geometria si chiama murabba'. Per non dire delle traduzioni in latino di tutto ciò, nei secoli successivi, specie in quella che oggi chiamiamo Italia.

Un regalo eccezionale che il famoso storico Rohdi Rashed fa a tutti noi!

Dopo la pagina 200, precisamente da 201 a 219, una serie di appendici colte di importanza straordinaria, da leggere minuziosamente.

Bene, e prima della pagina 115? Un altro libro, affascinante. Un sunto originale, ricco di notizie ma scritto in modo trascinante, della storia dell'algebra, dai califfi dell'VIII secolo fino alle disfide matematiche che videro la creazione delle formule per le risoluzioni delle equazioni algebriche generali di III e IV grado, storia tutta italiana e in larga misura bolognese, a tutti ben nota.

Un libro che deve essere letto da tutti coloro che amano la storia della matematica, da tutti i docenti, ma anche dagli studenti più interessati e curiosi.

Bauman, Z. (2016). *Scrivere il futuro*. Roma: Lit.

Per favore, procuratevi questo libro, cercatelo dovunque, leggetelo, rileggetelo, non fatevelo sfuggire. È una delle cose più intelligenti, significative e profonde pubblicate recentemente. D'altra parte, è stato scritto da Zygmunt Bauman, famoso alle masse per l'idea di *società liquida* che ha fatto il giro del mondo, uno dei motti più famosi degli ultimi decenni. Si tratta di un testo di pochissime pagine che finisce con due citazioni straordinarie, quella della storia personale di Václav Havel e quella di Antonio Gramsci, secondo la quale la storia non va vissuta, subìta, va *fatta* da noi stessi. E comincia con l'analisi critica della posizione di Pierre-Simon Laplace sul determinismo causale. Lo scritto, brevissimo, ripeto, ma infinitamente incisivo, tratta del problema più sentito del nostro periodo, che si può condensare nel dibattito fra mixofobia e mixofilia: il rifiuto del diverso, dello straniero, come atteggiamento di base, e l'atteggiamento contrario, l'accettazione del confronto fra culture. L'argomento è trattato con una logica magica dalla quale scaturisce una posizione di un'intelligenza etica senza pari che ti lascia esterrefatto. Bauman, come suo solito, tratteggia palcoscenici rigorosamente delineati, non basati su sensazioni o atteggiamenti moralistici, ma sull'evidenza storica, quella che ci permette, appunto, di scriverci da noi la storia. La proposta di Bauman si basa sul fatto che il determinismo laplaciano è stato messo in crisi dalla scienza stessa che ha cominciato a riflettere su sé stessa dando al dubbio, all'idea di evoluzione storica, alla casualità rilevanze epistemologiche che le sono mancate per millenni. Un libro dotto, profondo, unico che qualsiasi persona sensibile deve assolutamente conoscere. Si tratta della conferenza che Bauman ha fatto il 1° agosto 2014 a Civitanova Marche, tradotto in modo perfetto da Cristina Guarnieri e prefatto dal linguista Massimo Arcangeli in modo significativo, molto problematico, dando spazio a sua volta all'analisi di termini oggi così pronunciati, spesso a sproposito.

Nulla a che fare con la matematica? La matematica è disciplina umanistica, dato che è creata da esseri umani per bisogni concreti o astratti umani. Dunque, l'essere umano è comunque al centro di tutti gli interessi di tutti gli studiosi. E il matematico, nel creare la matematica, scrive il suo futuro. Proprio come l'atteggiamento suggerito da Bauman.

La matematica e la sua didattica, Anno 25, n. 1, 2017
ISSN 1120-9968